



Analytical solution of pollutant transport equation in different types of river networks considering distributed source term

Mohammad Javad Fardadi Shilsar¹, Mehdi Mazaheri^{✉2} and Jamal Mohammad Vali Samani³

1. Department of Water Engineering and Management, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

Email: m.fardadi@modares.ac.ir

2. Corresponding Author, Department of Water Engineering and Management, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran. Email: m.mazaheri@modares.ac.ir

3. Department of Water Engineering and Management, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

Email: samani_j@modares.ac.ir

Article Info

Article type: Research Article

Article history:

Received: Apr. 20, 2022

Received: May. 23, 2022

Accepted: May. 30, 2022

Published online: July. 23, 2022

Keywords:

Concentration
Distribution Function,
Laplace Transform Method,
Constant Coefficients,
Mathematical Modeling,
Advection-Dispersion-Reaction-
Source Equation.

ABSTRACT

In this study, the analytical solution of the pollution transport equation considering distributed source term and initial condition was performed by Laplace transform method for a general river network in a finite domain with constant coefficients for upstream and downstream using Dirichlet boundary conditions. Existence of the source term and initial condition increases the computational complexity to find the particular solution of the ordinary differential equation. To evaluate the existing analytical solution, two hypothetical examples were presented, that in each, modeling was performed on two branch and loop networks types considering a distributed source of pollution. Input data for modeling each of the desired river networks include values of velocity, dispersion coefficient, branch lengths, flow area, and input concentrations from boundaries and distributed sources. By calculating the diffusion and Laplace mass balance matrices (by influencing the distributed source) in the river network based on the connection and data matrix, a nonlinear equations system is created according to the Laplace s variable, which by solving it, the pollution concentration matrix and consequently the pollution concentration in each node is calculated by numerical inverse Laplace algorithm. The numerical solution used to validate the proposed analytical solution. The results showed that the statistical indices of R^2 , root mean square error, and mean absolute error in the best case were 99.86%, 0.0099, and 0.0067 kg/m^3 for 1456 route and in the worst case were 95.20%, 0.0309 and 0.0194 kg/m^3 for 23456 route of the loop network, respectively. The results showed that the two proposed solutions are well compatible together, indicating the good performance of the existing analytical solution and its replacement instead of numerical solution due to higher accuracy in the river network.

Cite this article: Fardadi Shilsar, M. J., Mazaheri, M., & Mohammad Vali Samani, J. (2022). Analytical solution of pollutant transport equation in different types of river networks considering distributed source term. *Iranian Journal of Soil and Water Research*, 53 (5), 1057-1077.

© The Author(s). Publisher: University of Tehran Press.

DOI: <http://doi.org/10.22059/ijswr.2022.341884.669250>



حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در انواع شبکه رودخانه با لحاظ عبارت منبع گسترده

محمدجواد فردادی شیل سر^۱، مهدی مظاهری^۲، جمال محمدولی سامانی^۳^۱. گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران. ایمیل: m.fardadi@modares.ac.ir^۲. نویسنده مسئول، گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران. ایمیل: m.mazaheri@modares.ac.ir^۳. گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران. ایمیل: samani_j@modares.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

در پژوهش حاضر، حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی با لحاظ عبارت منبع گسترده و شرط اولیه، برای یک شبکه رودخانه عام در یک دامنه محدود با ضرایب ثابت به‌ازاء شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع دیریکله با روش تبدیل لاپلاس انجام گرفت. وجود عبارت منبع و شرط اولیه، پیچیدگی محاسبات را به‌لحاظ یافتن جواب خصوصی معادله دیفرانسیل معمولی دوچندان می‌کند. به‌منظور ارزیابی حل تحلیلی موجود، دو مثال فرضی ارائه گردید، که در هر کدام، مدل‌سازی بر روی دو نوع شبکه شاخه‌ای و حلقه‌ای با در نظر گرفتن یک منبع آلودگی گسترده انجام گرفت. داده‌های ورودی برای مدل‌سازی هر یک از شبکه‌های رودخانه دلخواه شامل، مقادیر سرعت، ضریب پراکندگی، طول شاخه‌ها، سطح مقطع جریان و غلظت‌های ورودی از مرزها و منبع گسترده می‌باشد. با محاسبه ماتریس‌های انتشار و بیلان جرم لاپلاس گرفته شده (با تاثیر منبع گسترده در آن) در شبکه رودخانه براساس ماتریس نحوه اتصال و ماتریس داده‌ها، یک دستگاه معادلات غیرخطی‌ای برحسب متغیر S لاپلاس ایجاد می‌شود، که با حل آن، ماتریس غلظت آلودگی و به‌تبع آن غلظت آلودگی در هر گره با الگوریتم لاپلاس‌گیری وارون عددی محاسبه می‌شود. به‌منظور اعتبارسنجی حل تحلیلی پیشنهادی از حل عددی استفاده شد. نتایج نشان داد که شاخص‌های آماری R^2 ، جذر میانگین مربع خطاها و میانگین خطای مطلق در بهترین حالت به‌ترتیب $99/86\%$ ، $0/0099$ و $0/0067$ کیلوگرم برمترمکعب برای مسیر 1456 و در بدترین حالت به‌ترتیب $95/20\%$ ، $0/0309$ و $0/0194$ کیلوگرم برمترمکعب برای مسیر 23456 شبکه حلقه‌ای بوده و دو حل مذکور انطباق خوبی با یکدیگر داشته و نشان‌دهنده عملکرد مطلوب حل تحلیلی موجود و جایگزینی آن به‌جای حل عددی به‌دلیل دقت بالاتر در شبکه رودخانه می‌باشد.

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱/۳۱

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۳/۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۳/۹

تاریخ انتشار: ۱۴۰۱/۵/۱

واژه‌های کلیدی:

تابع توزیع غلظت،
روش تبدیل لاپلاس،
ضرایب ثابت،
مدل‌سازی ریاضی،
معادله جابه‌جایی-پراکندگی-واکنش-
منبع

استناد: فردادی شیل سر، محمدجواد؛ مظاهری، مهدی؛ و محمدعلی سامانی، جمال (۱۴۰۱). حل تحلیلی معادله انتقال آلاینده در انواع شبکه رودخانه با لحاظ عبارت منبع گسترده. *مجله تحقیقات آب و خاک ایران*، ۵۳ (۵)، ۱۰۷۷-۱۰۵۷.

DOI: <http://doi.org/10.22059/ijswr.2022.341884.669250>

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران. © نویسندگان.

مقدمه

آب یکی از ضروری‌ترین اجزای زندگی بشر بوده که هرگز ۱۰۰ درصد عاری از آلودگی نیست و به‌طور طبیعی دارای آلاینده‌هایی که عمدتاً مواد شیمیایی و میکروارگانیسم‌های ایجاد شده توسط فعالیت‌های انسانی است، می‌باشد (Fawell & Nieuwenhuijsen, 2003) و به‌عنوان یک منبع اصلی عفونت و بیماری در بین بشر شناخته شده است (Edokpayi et al., 2018).

یک شبکه رودخانه متشکل از شاخه‌هایی از رودخانه‌هاست، که به یکدیگر متصل بوده و یک شبکه رودخانه را به‌وجود می‌آورند و در آن جریان و آلودگی ناشی از آلاینده‌ها در یک یا چند نقطه به‌صورت زهکش خارج می‌گردد. شبکه‌های رودخانه‌ای عناصر کلیدی چشم‌انداز هستند، زیرا دالان‌های اکولوژیکی برای گونه‌های بیولوژیکی را نشان می‌دهند و به شکل قابل توجهی در شکل‌دهی واکنش هیدرولوژیکی حوضه‌ها کمک می‌کنند (Rodriguez-Iturbe et al., 2009; Rinaldo et al., 2018; Biswal & Marani, 2010)، همچنین، شبکه‌های رودخانه‌ای ویژگی‌های زیستگاه سلسله مراتبی را برای آبزیان آب شیرین (Master et al., 1998; Matthews, 2012) و همچنین مسیرهایی برای بیماری‌های خطرناک منتقله از طریق آب (مانند وبا) فراهم می‌کنند (Codeço, 2001; Pascual et al., 2002)، بنابراین، مسئله آلودگی شبکه‌های رودخانه مشکلات زیادی را در پی خواهد داشت و خسارات ناشی از آن بیشتر از یک شاخه از رودخانه خواهد بود.

مدل‌سازی ریاضی انتقال آلودگی در شبکه رودخانه توسط معادله جابه‌جایی-پراکندگی-واکنش-منبع^۱ (ADRSE) صورت می‌گیرد، که معادله مذکور، از نوع معادلات دیفرانسیل خطی با مشتقات جزئی نسبت به مکان و زمان بوده و براساس قانون اول فیک^۲ حاصل شده است، بنابراین، پاسخ این معادله، یک تابع توزیع غلظت برحسب مکان و زمان می‌باشد. به‌منظور تعیین پاسخ تحلیلی معادله ADRE، تاکنون روش‌های متفاوتی توسط پژوهشگران ارائه شده است، که بیشتر آن‌ها برای محیط متخلخل، و بعد از آن برای رودخانه ارائه شده است، اما درخصوص شبکه رودخانه، تحقیقات به‌عمل آمده محدود بوده، که تقریباً تمامی آن‌ها به جهت یافتن پاسخ معادله ADRE برگرفته از روش عددی است و در آن عبارت مربوط به منبع آلودگی یا لحاظ نشده و اگر لحاظ شده باشد، در حالت ساده، به‌صورت آلودگی نقطه‌ای می‌باشد. لازم به ذکر است، که از حل‌های تحلیلی به‌دلیل سرعت انجام محاسبات بالا و دقت زیاد آن نسبت به روش‌های عددی، به‌عنوان ابزاری جهت صحت‌سنجی روش‌های عددی به‌کار گرفته می‌شوند (Guerrero et al., 2009). همان‌طور که اشاره شد، تاکنون حل تحلیلی در بین پژوهش‌های موجود برای شبکه رودخانه وجود ندارد و تنها پژوهشگران به‌منظور مدل‌سازی از حل‌های عددی استفاده کرده‌اند، که می‌توان به پژوهش‌های Zhang et al. (2008) و Kilic & Aral (2009) اشاره نمود، که محوریت کار آن‌ها براساس روش جداسازی عددی معادله ADE با روش طرح ضمنی^۳ می‌باشد. در پژوهشی دیگر که توسط Deng (2019) انجام گرفت، با استفاده تکنیک تجزیه و تحلیل رابطه خاکستری GRA و نرم‌افزار GIS به ارتباط بین کیفیت آب و ساختار اتصال شبکه رودخانه دشت جیانگ‌سو در شرق چین و استخراج الگوی مکانی کیفیت آب پرداخته شد. لازم به ذکر است که، درخصوص شبکه‌های بیولوژیکی و شبکه‌های تصفیه‌خانه‌ای نیز راه‌حل‌های تحلیلی برای حل معادله ADE نیز استخراج شده است. در زمینه شبکه‌های بیولوژیکی می‌توان به حل معادله یک‌بعدی انتقال املاح برای شبکه‌های میسیلیوم قارچی با استفاده از روش تبدیل لاپلاس^۴ برای دامنه محدود به‌ازاء شرایط مرزی ثابت اشاره کرد (Heaton et al., 2012). در پژوهشی دیگر نیز، Diamantini et al. (2019) از رویکرد تحلیلی روش لاگرانژ، برای شبکه تصفیه‌خانه‌ای رودخانه آدیگه در ایتالیا برای حل معادله ADE و تعمیم آن برای شبکه استفاده نمودند.

به‌طور کلی، روش‌های تبدیل فوریه^۵، تابع گرین^۶، تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته^۷ (GITT) و تبدیل لاپلاس جزء متداول‌ترین روش‌های تحلیلی برای حل معادله ADRE در محیط متخلخل و رودخانه به‌شمار می‌روند (Chen et al., 2011; Fardadi Shilsar et al., 2022; Fedi et al., 2010; Leij et al., 1991; Leij et al., 1993; Mashhadgarne et al., 2019, 2021; Massabó et al., 2006, 2011; Mazaheri et al., 2013). روش تحلیلی تبدیل فوریه یکی از روش‌های قدیمی حل تحلیلی بوده، که کاربرد وسیعی در حل معادله ADE با ضرایب ثابت در محیط متخلخل دارد (Yang et al., 2019). در پژوهشی دیگر که توسط Bharati et al. (2019) انجام گرفت، استخراج حل تحلیلی معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی در یک دامنه محدود با صرف‌نظر از ترم منبع در محیط آب زیرزمینی با روش تبدیل فوریه صورت گرفت و

1 Advection-dispersion-reaction-source

2 First Fick's law

3 Implicit

4 Laplace transform method

5 Fourier transform method

6 Green function method

7 Generalized Integral Transform Technique

در آن ضریب پراکندگی تابعی درجه دو از مکان و سرعت ثابت لحاظ گردید، همچنین، ایشان در پژوهشی دیگر ضمن در نظر گرفتن سرعت و ضریب پراکندگی هر دو تابعی از مکان، معادله یک بعدی ADE را با به کارگیری تلفیق روش تبدیل فوریه و تغییر متغیر به صورت تحلیلی حل کردند (Bharati et al., 2018). روش تابع گرین یک روش کاربردی در زمینه مدل سازی انتقال آلودگی با حل معادله ADE در حالات یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی با ضرایب ثابت و متغیر در دامنه های محدود، نیمه محدود و نامحدود در محیط های متخلخل و رودخانه می باشد (Leij & Van Genuchten, 2000; Mashhadgarne et al., 2017; Park & Zhan, 2001; Sanskrityayn et al., 2018). (2017) Sanskrityayn et al. در پژوهشی در محیط آب زیرزمینی، معادله یک بعدی ADE را با ضرایب متغیر با لحاظ ترم منبع و شرط اولیه و با در نظر گرفتن سرعت و ضریب پراکندگی تابعی از زمان یا مکان و یا هر دو با استفاده از ترکیب دو روش تابع گرین و تغییر متغیر در یک دامنه نامحدود حل کردند. در راستای همین پژوهش، ایشان در پژوهشی دیگر، با روش تابع گرین بر روی ترم منبع نقطه ای و گسترده در محیط آب زیرزمینی متمرکز شده و برای سه حالت سرعت و ضریب پراکندگی تابعی از زمان یا مکان و یا هر دو، حل خود را گسترش دادند (Sanskrityayn et al., 2018). همچنین بعدها، ایشان در پژوهشی دیگر با به کارگیری روش تابع گرین در دامنه نامحدود، معادله یک بعدی ADE را با صرف نظر کردن از شرط اولیه و واکنش و با در نظر گرفتن ترم منبع نقطه ای و گسترده برای محیط متخلخل با ضرایب متغیر حل کردند و شبیه سازی هایی را برای ترم منبع نقطه ای و گسترده انجام دادند و نتایج را با حل عددی و سایر حل های تحلیلی قیاس کردند (Sanskrityayn et al., 2021).

یکی دیگر از روش های کاربرد در حل مسائل مربوط به معادله انتقال آلودگی، روش انتگرال تعمیم یافته GITT است، که روش مذکور مبتنی بر روش توابع ویژه بوده و در حل مسائل پیچیده معادلات PDE¹ با شرایط مرزی پیچیده کارگشا می باشد (Cotta et al., 1993; Leij et al., 2016). Bharati et al. (2017) طی پژوهشی معادله یک بعدی انتقال آلودگی را در محیط متخلخل با صرف نظر کردن از ترم منبع و واکنش در یک دامنه محدود با در نظر گرفتن سرعت تابعی خطی از مکان و ضریب پراکندگی تابعی از مکان با درجه n با روش GITT به صورت تحلیلی حل کردند. بعدها، Amiri et al. (2021) حل تحلیلی معادله یک بعدی ADRE را با ضرایب متغیر با استفاده از روش GITT توسعه دادند و با در نظر گرفتن ترم های منبع و واکنش، این معادله را برای رودخانه به صورت تحلیلی حل کردند و نتایج خود را با حل عددی و سایر حل های تحلیلی دیگران صحت سنجی نمودند. لازم به ذکر است که، روش مذکور نیز در حل معادله دو بعدی انتقال آلودگی با ضرایب ثابت در دامنه محدود به ازاء چند منبع آلاینده فعال در رودخانه نیز مورد توجه (Mashhadgarne et al., 2020) بوده است. لازم به ذکر است که برخی از پژوهشگران نیز منحصرأ معادله یک بعدی ADE را به منظور برآورد ضریب پراکندگی در رودخانه ها حل نمودند (Ramezani et al., 2019).

یکی دیگر از روش های تحلیلی قدرتمند و کاربرد در حل معادله ADE، روش تبدیل لاپلاس است، که می تواند در یافتن پاسخ تحلیلی معادله مذکور، در حالت دو بعدی با ضرایب متغیر و با وجود ترم منبع در شرایطی که ضرایب سرعت، ضریب پراکندگی، ضریب زوال واکنش و ترم منبع تابعی از زمان و مکان باشند، در یک محیط متخلخل نیمه متناهی مفید باشد (Yadav & Kumar, 2019). (2018) Moranda et al. در پژوهشی معادله یک بعدی انتقال آلودگی را در محیط آب زیرزمینی با ضرایب ثابت با روش تغییر متغیر و تبدیل لاپلاس در حالت عدم وجود ترم منبع در دامنه های محدود و نیمه محدود با در نظر گرفتن شرط مرزی ورودی از نوع دیریکله و رایین و شرط مرزی خروجی نیومن و حد بی نهایت غلظت برابر با صفر به صورت تحلیلی حل کردند، این درحالیست که، Carr (2020) معادله یک بعدی ADRE را با ضرایب متغیر با فرض ثابت بودن سرعت و ضریب پراکندگی برای هر لایه در یک محیط متخلخل m لایه با بهره گیری از روش تبدیل لاپلاس به صورت تحلیلی حل نمود. همچنین طی دو پژوهشی، حل تحلیلی فرم یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی معادله ADRE با ضرایب ثابت در حالت وجود و یا عدم وجود ترم های منبع و واکنش در محیط رودخانه با روش تبدیل لاپلاس انجام شد (Genuchten et al., 2013a, 2013b).

به طور کلی، از کاربردهای مهم لحاظ عبارت منبع در معادله انتقال می توان به این مورد اشاره کرد که، یک شبکه رودخانه علاوه بر مرزها، در طول مسیر نیز در معرض انواع آلودگی ها قرار می گیرد، که برای محاسبه غلظت آلودگی آن ها، بایستی عبارت منبع به معادله انتقال اضافه شود تا غلظت مورد نظر از طریق آن وارد محاسبات شود. براساس بررسی های انجام شده در خصوص پیشینه تحقیقات، می توان اذعان داشت که تقریباً تمامی حل های تحلیلی ارائه شده برای معادله انتقال آلودگی با لحاظ عبارت منبع (گسترده و نقطه ای) در محیط متخلخل و رودخانه بوده و برای شبکه رودخانه عملاً حل تحلیلی با وجود عبارت منبع گسترده به دلیل پیچیدگی شبکه رودخانه،

حجم محاسبات زیاد، محدودیت‌های روش‌های تحلیلی، دشواری کمی کردن منابع آلاینده غیرنقطه‌ای و ... وجود ندارد. همچنین، در زمینه حل‌های تحلیلی‌ای که تاکنون پژوهشگران برای حل معادله انتقال آلودگی با وجود عبارت منبع در محیط‌های متخلخل و رودخانه انجام داده‌اند نیز، عبارت منبع در بیشتر موارد به صورت آلودگی نقطه‌ای به‌زاء فعالیت یک یا چند منبع آلاینده فعال در نظر گرفته شده (که تبدیل آن بسیار راحت بوده و با در نظر گرفتن ضرب تابع مکانی دلتای دیراک در تابع زمانی غلظت آلودگی انجام می‌گیرد) و در برخی موارد نیز عبارت منبع به صورت آلودگی پیوسته با الگوی ساده (مانند الگوی سینوسی، کسینوسی، ثابت و نمایی) از ابتدای مسیر تا انتهای آن در محیط متخلخل و یا رودخانه در نظر گرفته شده است و حالت مذکور را شبیه‌سازی کرده‌اند. همچنین، برخی از پژوهشگران نیز صرفاً عبارت منبع را به صورت گسترده در روند حل تحلیلی خود آورده‌اند اما شبیه‌سازی‌هایی به دلیل زمان‌بر بودن و هزینه محاسباتی بیشتر انجام ندادند. در خصوص حل‌های عددی محدودی که در شبکه رودخانه توسط پژوهشگران انجام گرفته است، چون این حل‌ها مبتنی بر روش‌های جداسازی یا نرم‌افزارهای مهندسی می‌باشند نسبت به حل‌های تحلیلی دارای دقت پایین‌تری می‌باشند، همچنین در روش‌های عددی مبتنی بر روش‌های جداسازی، تاکنون لحاظ عبارت منبع در معادله آلودگی برای شبکه رودخانه دیده نشده است و پژوهشگران برای مدل‌سازی عبارت منبع از نرم‌افزارهای عددی‌ای استفاده کرده‌اند که خود دارای خطاهای رایج عددی می‌باشند. بنابراین، مهم‌ترین نوآوری این پژوهش، استخراج یک راه حل تحلیلی عام برای معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی (که نوع آلودگی به صورت محلول با الگوی آلودگی واکنش‌پذیر درجه اول می‌باشد) با لحاظ عبارت منبع گسترده (که از آن می‌توان برای منبع آلاینده نقطه‌ای با استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک استفاده نمود) در شبکه رودخانه با استفاده روش تبدیل لاپلاس تحت وجود شرط اولیه و شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع اول می‌باشد. همچنین یکی از مهم‌ترین جنبه‌های نوآوری دیگر این پژوهش برخلاف پیشینه‌های ذکر شده این است که، عبارت منبع به صورت آلودگی ای با یک طول مشخص در یک فاصله کوتاه در مسیر شبکه رودخانه توزیع شده است و حالت مذکور مورد شبیه‌سازی قرار خواهد گرفت. در ادامه نیز، مدل‌سازی مبتنی بر وجود منبع آلاینده گسترده در دو شبکه شاخه‌ای^۱ و حلقه‌ای^۲ به‌زاء الگوی شرایط مرزی دلخواه و مقایسه آن با حل عددی انجام می‌شود.

مبانی تئوری و روش‌ها

جمع‌آوری داده‌ها و نحوه ارزیابی و صحت‌سنجی مدل تحلیلی

همان‌طور که ذکر گردید، حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در شبکه رودخانه با لحاظ عبارت منبع گسترده، تاکنون در سطح بین‌المللی در پژوهش‌های انجام شده وجود نداشته و برای اولین بار این مطالعه در دانشگاه تربیت مدرس تهران انجام گرفته است. در زمینه حل‌های تحلیلی معادله انتقال آلودگی، عموماً پژوهشگران بسیاری برای صحت‌سنجی و اعتبارسنجی حل‌های تحلیلی خود از حل‌های تحلیلی سایر پژوهشگران دیگر و یا حل‌های عددی (مدل‌های عددی) استفاده کرده‌اند (Bharati et al., 2017, 2018; Carr, 2020; ; Chen et al., 2011)، در این پژوهش نیز، به دلیل عدم وجود حل تحلیلی برای معادله انتقال آلودگی با لحاظ عبارت منبع برای آن در شبکه رودخانه، از حل عددی تفاضلات محدود^۳ با گسسته‌سازی تمام ضمنی^۴ با تقریب مشتق مکانی مرکزی^۵ در مکان با هدف کاهش پراکندگی عددی، برای اعتبارسنجی و مقایسه با حل تحلیلی موجود در این پژوهش استفاده می‌شود، که استفاده از حل عددی مذکور در مطالعات سایر پژوهشگران نیز دیده شده است (Fardadi Shilsar et al., 2022; Mashhadgarme et al., 2013, 2017). در انتها نیز، با استفاده از شاخص‌های خطای آماری مانند، ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع خطاها ($RMSE$) و میانگین خطای مطلق (MAE) دو حل مذکور در هر کدام از دو مثال مورد مقایسه قرار می‌گیرند. لازم به ذکر است که، پژوهش‌گران بسیاری برای حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در مطالعات خود در محیط‌های رودخانه و متخلخل از حل عددی به جهت اعتبارسنجی استفاده نموده‌اند (Bharati et al., 2019; Carr, 2020; Mazaheri et al., 2013; Sanskritayn et al., 2018; Sanskritayn et al., 2021). همچنین در این پژوهش نیز ضمن اینکه مدل‌سازی بر روی دو نوع شبکه شاخه‌ای و حلقه‌ای دلخواه (فرضی) جهت نشان دادن کاربرد حل تحلیلی موجود انجام می‌شود، داده‌های ورودی آن شامل، داده‌های سرعت، ضریب پراکندگی، سطح مقطع جریان، طول شاخه‌ها، ضریب زوال واکنش، غلظت آلاینده

1 Branch river network
2 Loop river network
3 Finite difference
4 Fully implicit
5 Central space



ورودی از مرزها و غلظت منبع آلاینده گسترده می‌باشد، که باتوجه به این که برای یک شبکه رودخانه تمامی داده‌های مذکور اعم از سرعت، ضریب پراکندگی، سطح مقطع عرضی، غلظت‌های ورودی و ... باهم و به‌صورت یکجا وجود ندارند، لذا نحوه جمع‌آوری داده‌ها برای این پژوهش براساس و الهام گرفته از اطلاعات و تجربیات نویسندگان این مطالعه و سایر پژوهشگران دیگر در زمینه حل تحلیلی معادله ADRE با لحاظ عبارت منبع می‌باشد، چرا که بسیاری از پژوهشگرانی که در زمینه حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در محیط متخلخل و رودخانه مطالعات خود را انجام دادند نیز، از داده‌های منطقی و معقول براساس تجربیات خود و سایر محققین دیگر استفاده نموده‌اند (Bharati et al., 2019; Chen et al., 2011; Mashhadgarme et al., 2021; Mazaheri et al., 2013; Genuchten et al., 2013a, 2013b). همچنین لازم به ذکر است که در پژوهش‌های مربوط به حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی، عموماً پژوهشگران به‌منظور نشان دادن کاربرد راه‌حل تحلیلی پیشنهادی خود منطقه مورد مطالعه‌ای تعریف نمی‌کنند و کاربرد حل تحلیلی خود را طی سناریوها یا مثال‌هایی فرضی نشان می‌دهند (Moranda et al., 2018; Park & Zhan, 2001; Yadav & Kumar, 2019)، از این‌رو در این پژوهش نیز، هدف نشان دادن کاربرد راه‌حل تحلیلی ارائه شده برای شبکه رودخانه طی دو مثال فرضی خواهد بود. لازم به ذکر است که در صورت وجود مجموعه کاملی از داده‌ها برای یک شبکه رودخانه موردی، راه‌حل پیشنهادی برای مدل‌سازی تحلیلی برای کلیه شبکه‌های رودخانه در سطح بین‌المللی کاربرد دارد.

فرضیات، مزایا و معایب رویکرد حل تحلیلی

همان‌طور که ذکر شد، در این مطالعه از روش تحلیلی تبدیل لاپلاس به‌منظور حل تحلیلی معادله دیفرانسیل انتقال آلودگی در شبکه رودخانه استفاده شده است. باتوجه به فیزیک مسئله و اهمیت محاسبه غلظت در گره‌های اتصال شاخه‌ها به‌یکدیگر در شبکه رودخانه، از شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع دیریکله در شبکه استفاده می‌شود. بنابراین در این مطالعه، از روش تحلیلی تبدیل لاپلاس به‌دلیل عدم وجود مشکل دامنه حل (نیمه‌محدود بودن آن) و همگن‌سازی شرایط مرزی و همین‌طور هزینه محاسباتی کمتر و کاربری آسان آن برای شبکه رودخانه نسبت به سایر تبدیلات انتگرالی دیگر در حل معادله ADE مانند، تبدیل فوریه - که برای دامنه نامحدود به‌کار می‌رود و اثر مرز را در نظر نمی‌گیرد- و تبدیل انتگرال تعمیم‌یافته (GITT) - که در آن مشکل همگن‌سازی شرایط مرزی وجود دارد- استفاده می‌شود. برخی از نقاط قوت روش تحلیلی تبدیل لاپلاس عبارتست از:

تبدیل لاپلاس (LT) برای مطالعه پاسخ‌های گذرا (یا پاسخ‌های زمانی) سیستم‌های خطی زمان ثابت (LTIS) مفید است.

مسائل را به‌طور مستقیم حل می‌کند و اعمال مسائل مقدار شرط اولیه در آن آسان می‌باشد (Kreyszig, 2009).

مهم‌ترین مزیت آن به‌کارگیری توابع پله‌ای^۱ و دلتای دیراک^۲ بوده، که تحت وجود ترم منبع پیچیده استفاده از این روش را آسان می‌کند (Kreyszig, 2009).

با حل معادله دیفرانسیل توسط روش تبدیل لاپلاس، می‌توان هر دو مؤلفه گذار و حالت ماندگار جواب را یکجا محاسبه نمود (Korn & Korn, 2000).

همچنین برخی از نقاط ضعف این روش به‌شرح زیر می‌باشد:

از روش تبدیل لاپلاس فقط می‌توان برای حل معادلات دیفرانسیل با ثابت‌های شناخته شده استفاده کرد و اگر معادله‌ای بدون

ثابت‌های شناخته شده باشد، استفاده از این روش بی‌فایده خواهد بود

هیچ تبدیل لاپلاس سریعی مطابق با تبدیل فوریه سریع وجود ندارد.

تبدیل لاپلاس وارون به‌طور کلی پیچیده بوده و این یکی از مهم‌ترین محدودیت‌های این روش است.

روش تبدیل لاپلاس (LT) تنها برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی‌ای استفاده می‌شود که یکی از متغیرهای اصلی آن دارای دامنه

نیمه‌محدود و یا نامحدود باشد.

مدل‌سازی ریاضی

روش تبدیل لاپلاس یکی از ابزارهای تحلیلی قدرتمند جهت حل معادله ADRE می‌باشد که برای شرایط‌های مرزی مسائل دیریکله^۳

1 Heaviside Function

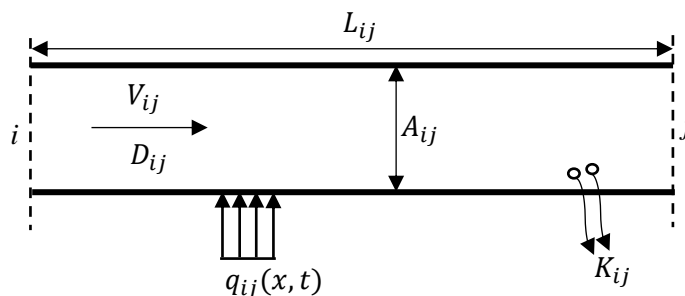
2 Dirac Function

3 Dirichlet

نیومن^۱ و کوشی^۲ پیشنهاد می‌شود و این تکنیک برای فرآیندهای چند ماده‌ای آلاینده‌ای معتبر بوده و وابستگی نمایی را در زمان اولیه منبع در نظر می‌گیرد (Clement, 2001; Srinivasan & Clement, 2008a, 2008b). به‌منظور حل یک معادله دیفرانسیل جزئی با روش تبدیل لاپلاس، مراحل زیر دنبال می‌شود (Kreyszig, 2009):

اعمال تبدیل لاپلاس بر روی یکی از متغیرهای مستقل، معمولاً t و تبدیل معادله PDE به یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE)^۳ اعمال تبدیل لاپلاس بر روی شرایط مرزی حل تحلیلی معادله دیفرانسیل معمولی تشکیل شده و محاسبه ضرایب ثابت ایجاد شده از آن اعمال تبدیل لاپلاس وارون جهت حل مسئله اصلی

در این پژوهش، به‌منظور حل تحلیلی معادله جابه‌جایی-پراکندگی-واکنش با لحاظ ترم منبع گسترده، فرض می‌شود که منابع آلاینده ورودی در اثر فرآیند واکنش در شبکه تحویل داده یا مصرف می‌گردد، بنابراین، منبع آلودگی‌ای که باقی می‌ماند با فرآیندهای جابه‌جایی و پراکندگی در شبکه حرکت می‌کند، از این‌رو، در گره‌های اتصال در شبکه رودخانه، سیستم اختلاط کامل وجود دارد. شکل ۱، نمای شماتیک یک شاخه از شبکه رودخانه را نشان می‌دهد. در شکل ۱، گره i به‌عنوان گره بالادست یک شاخه رودخانه، گره j به‌عنوان گره پایین‌دست یک شاخه رودخانه، A_{ij} سطح مقطع جریان، D_{ij} مقدار ضریب پراکندگی، L_{ij} طول یک شاخه رودخانه، $q_{ij}(x,t)$ ترم منبع ورودی، K_{ij} ضریب زوال واکنش و V_{ij} سرعت جریان، که جهت جریان آن از گره i به j باشد را نشان می‌دهد ($V_{ij} = -V_{ji}$).



شکل ۱. ویژگی‌های نمای شماتیک یک شاخه از شبکه رودخانه

معادلات اساسی مدل‌سازی

معادله دیفرانسیل حاکم بر انتقال و انتشار آلاینده‌ها در شبکه رودخانه همان معادله جابه‌جایی-پراکندگی-واکنش-منبع می‌باشد. این معادله با در نظر گرفتن ضرایب ثابت براساس قانون فیک برای یک شاخه از شبکه رودخانه در دامنه محدود $0 \leq x \leq L_{ij}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود (Chapra, 2008):

$$\frac{\partial c_{ij}(x,t)}{\partial t} = D_{ij} \frac{\partial^2 c_{ij}(x,t)}{\partial x^2} - V_{ij} \frac{\partial c_{ij}(x,t)}{\partial x} - K_{ij} c_{ij}(x,t) + A_{ij} q_{ij}(x,t) \quad \text{رابطه (۱)}$$

که در آن c_{ij} تابع غلظت آلودگی در واحد طول در مکان x و زمان t ، D_{ij} ضریب پراکندگی در راستای x ، V_{ij} سرعت جریان، $q_{ij}(x,t)$ ترم منبع در هر شاخه ij ، A_{ij} سطح مقطع جریان و K_{ij} بیان‌گر ضریب زوال واکنش می‌باشد. علت در نظر گرفتن c_{ij} در واحد طول این است که، سطح مقطع جریان به‌عنوان یک پارامتر کلیدی، لازم است از طریق روابط (۲) و (۳) که به ترتیب نشان‌دهنده شرط اولیه با تابع $f_{ij}(x)$ در هر شاخه و شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست رودخانه می‌باشند، وارد محاسبات در ادامه شود، لذا:

$$IC : f_{ij}(x) = \frac{c_{ij}(x,0)}{A_{ij}} \Rightarrow c_{ij}(x,0) = A_{ij} f_{ij}(x) \quad \text{رابطه (۲)}$$

$$\begin{cases} c_i(t) = \frac{c_{ij}(0,t)}{A_{ij}} \\ c_j(t) = \frac{c_{ij}(L_{ij},t)}{A_{ij}} \end{cases} \Rightarrow BC : \begin{cases} c_{ij}(0,t) = A_{ij} c_i(t) \\ c_{ij}(L_{ij},t) = A_{ij} c_j(t) \end{cases} \quad \text{رابطه (۳)}$$

1 Newman

2 Cauchy

3 Ordinary differential equation

معادلات (۳) بیانگر شرط مرزی بالادست و پایین‌دست از نوع دیریکله در یک شاخه از رودخانه می‌باشد. اگر در شبکه رودخانه، بین گره‌های i و j اتصالی وجود نداشته باشد، در این صورت مقدار سطح مقطع جریان برابر با صفر و به تبع آن، غلظت آلودگی صفر خواهد بود. می‌توان اذعان داشت که برای هر گره i در شبکه رودخانه، باتوجه به قانون فیزیکی فیک رابطه‌ای براساس مجموع بارگذاری‌های جابه‌جایی و پراکندگی وجود دارد که به‌صورت زیر بیان می‌شود (Heaton et al., 2012; Koplík et al., 1988):

$$J_{ij}(t) = \left[V_{ij} c_{ij}(x, t) - D_{ij} \frac{\partial c_{ij}(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad \text{رابطه (۴)}$$

در رابطه بالا، $J_{ij}(t)$ بیانگر بیلان جرم در شبکه رودخانه بوده و نشان‌دهنده ورود یک منبع به گره j است. باتوجه به اینکه در شبکه رودخانه ممکن است بیش از یک اتصال شاخه به گره j وجود داشته باشد، بنابراین، رابطه (۴) به‌صورت رابطه (۵) تعمیم داده می‌شود (Heaton et al., 2012; Koplík et al., 1988):

$$I_i(t) = \sum_j \left[V_{ij} c_{ij}(x, t) - D_{ij} \frac{\partial c_{ij}(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad \text{رابطه (۵)}$$

بنابراین، در رابطه (۵)، $I_i(t)$ جریان خالص آلودگی خارج شده از هر گره i را نشان می‌دهد.

حل تحلیلی معادله جابه‌جایی-پراکندگی-واکنش-منبع در یک شاخه رودخانه

به‌منظور حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی رابطه (۱) با لحاظ عبارت منبع گسترده برای آن در دامنه محدود $0 \leq x \leq L_{ij}$ ، ابتدا بایستی از معادلات (۱) و (۳) نسبت به متغیر زمان لاپلاس گرفته شود (دلیل اعمال تبدیل لاپلاس بر روی متغیر t به‌دلیل نیمه‌محدود بودن آن است) و سپس با لحاظ شرط اولیه $c_{ij}(x, 0)$ در معادله لاپلاس گرفته شده از رابطه (۱)، معادلات حاصل به شرح زیر می‌باشند:

$$(s + K_{ij})C_{ij} + V_{ij} \frac{\partial C_{ij}}{\partial x} - D_{ij} \frac{\partial^2 C_{ij}}{\partial x^2} = \psi_{ij}(x, s) \quad \text{رابطه (۶)}$$

$$BC : \begin{cases} C_{ij}(0, s) = A_{ij} C_i(s) \\ C_{ij}(L_{ij}, s) = A_{ij} C_j(s) \end{cases} \quad \text{رابطه (۷)}$$

که در آن:

$$\psi_{ij}(x, s) = A_{ij} Q_{ij}(x, s) + A_{ij} f_{ij}(x) \quad \text{رابطه (۸)}$$

باتوجه به دو معادله (۶) و (۸)، لحاظ ترم منبع و شرط اولیه در معادله اصلی (۱)، باعث شده است که بعد از اعمال تبدیل لاپلاس در معادله (۱)، معادله دیفرانسیل معمولی (۶) حاصله، ناهمگن گردد، در این صورت معادله مذکور دو جواب عمومی و خصوصی خواهد داشت، که به‌دست آوردن جواب خصوصی پیچیدگی و دشواری به‌مراتب بیشتری نسبت به جواب عمومی دارد. در ادامه، علاوه بر لاپلاس‌گیری از معادلات (۱) و (۳)، از معادله (۵) یعنی بیلان جرم تعمیم‌یافته به‌ازاء چند اتصال از هر گره i نیز نسبت به متغیر زمان لاپلاس گرفته می‌شود، در این صورت:

$$\varphi_i(s) = \sum_j \left[V_{ij} C_{ij}(x, s) - D_{ij} \frac{\partial C_{ij}(x, s)}{\partial x} \right]_{x=0} \quad \text{رابطه (۹)}$$

در معادله بالا، $\varphi_i(s)$ نشان‌دهنده تبدیل لاپلاس $I_i(t)$ ، شار عبوری از گره i می‌باشد. همان‌طور که ذکر گردید، پس از لاپلاس‌گیری از معادله انتقال آلودگی با لحاظ عبارت منبع، معادله (۶) حاصل گردید، که معادله مورد نظر یک معادله دیفرانسیل معمولی ناهمگن بوده و دارای دو جواب عمومی و خصوصی می‌باشد. جواب عمومی معادله (۶) با در نظر گرفتن $\psi_{ij}(x, s) = 0$ (یعنی تأثیر شرط اولیه و ترم منبع لحاظ نمی‌شود) به‌دست می‌آید، که معادله (۶) در این صورت همگن خواهد شد، در این صورت:

$$(s + K_{ij})C_{ij} + V_{ij} \frac{\partial C_{ij}}{\partial x} - D_{ij} \frac{\partial^2 C_{ij}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{رابطه (۱۰)}$$

که با در نظر گرفتن رابطه (۱۱) و دو نسبت بدون بعد برای هر شاخه ij در روابط (۱۲) به شرح زیر:

$$\alpha_{ij}(s) = \Delta = \sqrt{V_{ij}^2 + 4D_{ij}(s + K_{ij})} \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

$$\theta_{ij} = \frac{V_{ij} L_{ij}}{2D_{ij}}, \quad \xi_{ij}(s) = \frac{\alpha_{ij}(s) L_{ij}}{2D_{ij}} \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

معادله (۱۰) به‌ازاء سه حالت $s < 0$ ، $s = 0$ و $s > 0$ یک‌بار حل شده و تنها به‌ازاء $s > 0$ دارای جواب می‌باشد، در این‌صورت با محاسبه ریشه‌های معادله (۱۰)، ضرایب ثابت B_1 و B_2 به‌وجود می‌آید. پاسخ عمومی معادله ODE رابطه (۶)، به‌صورت رابطه (۱۳) می‌باشد:

$$C_{ij}(x, s) = B_1 e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x} + B_2 e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x} \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

بعد از یافتن پاسخ عمومی معادله (۶)، با استفاده از روش تغییر متغیر پارامترها (روش لاگرانژ^۱) و درنظر گرفتن دو جواب همگن $C_1(x, s) = e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}$ و $C_2(x, s) = e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}$ ، پاسخ خصوصی معادله (۶) به‌دست خواهد آمد، که به همین منظور، در ابتدا حاصل رونسکین^۲ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$W_{ij}(x, s) = C_1(x, s) \frac{\partial C_2'(x, s)}{\partial x} - C_2(x, s) \frac{\partial C_1'(x, s)}{\partial x} = \frac{-a_{ij}(s) e^{\frac{2\theta_{ij}x}{L_{ij}}}}{D_{ij}} \quad \text{رابطه (۱۴)}$$

با به‌کارگیری روش تغییر متغیر پارامترها، به‌ازاء هر s و هر تابع $\psi_{ij}(x, s)$ داده شده، پاسخ اختصاصی معادله (۶) با توجه به روابط (۲۹) تا (۳۱) پیوست مقاله به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g(x, s, \psi_{ij}(y, s)) = \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{\left(\frac{\xi_{ij}(s) - \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} \psi_{ij}(y, s) dy - \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{-\left(\frac{\xi_{ij}(s) + \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} \psi_{ij}(y, s) dy \quad \text{رابطه (۱۵)}$$

با به‌کارگیری رابطه (۸)، رابطه (۱۵) به‌صورت رابطه (۱۶) بازنویسی می‌شود:

$$g(x, s, Q_{ij}(y, s), f_{ij}(y)) = \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{\left(\frac{\xi_{ij}(s) - \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} [A_{ij} Q_{ij}(y, s) + A_{ij} f_{ij}(y)] dy - \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{-\left(\frac{\xi_{ij}(s) + \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} [A_{ij} Q_{ij}(y, s) + A_{ij} f_{ij}(y)] dy \quad \text{رابطه (۱۶)}$$

با لحاظ خاصیت جداپذیری انتگرال جمع دو تابع به‌صورت $\int_0^x [N_1(y) + N_2(y)] dy = \int_0^x N_1(y) dy + \int_0^x N_2(y) dy$ ، رابطه (۱۶)

به‌صورت رابطه (۱۷) بازنویسی می‌شود:

$$g(x, s, Q_{ij}(y, s), f_{ij}(y)) = \left. \begin{aligned} & \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{\left(\frac{\xi_{ij}(s) - \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} A_{ij} Q_{ij}(y, s) dy \\ & - \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{-\left(\frac{\xi_{ij}(s) + \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} A_{ij} Q_{ij}(y, s) dy \end{aligned} \right\} \text{I}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{\left(\frac{\xi_{ij}(s) - \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} A_{ij} f_{ij}(y) dy \\ & - \frac{e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x}}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{-\left(\frac{\xi_{ij}(s) + \theta_{ij}}{L_{ij}}\right)y} A_{ij} f_{ij}(y) dy \end{aligned} \right\} \text{II} \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

همان طور که در رابطه (۱۶) ملاحظه می‌شود، بخش اول تاثیر عبارت منبع و بخش دوم اثر شرط اولیه را در نظر می‌گیرد. پاسخ نهایی معادله دیفرانسیل (۶) از مجموع دو جواب عمومی و خصوصی محاسبه شده به صورت رابطه (۱۷) می‌باشد:

$$C_{ij}(x, s) = B_1 e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x} + B_2 e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x} + g(x, s, Q_{ij}(y, s), f_{ij}(y)) \quad \text{رابطه ۱۸}$$

باتوجه به رابطه (۱۷)، ثابت‌های B_1 و B_2 نمایان است، که برای محاسبه آن‌ها بایستی رابطه شرایط مرزی لاپلاس‌گیری شده معادله (۷) را به کار برد، بنابراین با اعمال رابطه (۷) در نقاط $x = 0$ و $x = L_{ij}$ ، روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$C_{ij}(0, s) = B_1 + B_2 = A_{ij} C_i(s) \quad \text{رابطه ۱۹}$$

$$C_{ij}(L_{ij}, s) = B_1 e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)L_{ij}} + B_2 e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)L_{ij}} + g(L_{ij}, s, Q_{ij}(y, s), f_{ij}(y)) = A_{ij} C_j(s)$$

بادر نظر گرفتن عبارت زیر:

$$\eta_{ij}(s) = \frac{-a_{ij}(s) e^{-\theta_{ij}} g(L_{ij}, s, Q_{ij}(y, s), f_{ij}(y))}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \quad \text{رابطه ۲۰}$$

بنابراین، ضرایب ثابت B_1 و B_2 با در نظر گرفتن معادله (۱۹) و حل دستگاه معادلات (۱۸)، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$B_1 = \frac{A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}} - A_{ij} C_i(s) e^{-\xi_{ij}(s)}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} + \frac{\eta_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \quad \text{رابطه ۲۱}$$

و به طور مشابه:

$$B_2 = \frac{A_{ij} C_i(s) e^{\xi_{ij}(s)} - A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} - \frac{\eta_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \quad \text{رابطه ۲۲}$$

با جایگذاری ثابت‌های B_1 و B_2 محاسبه شده در رابطه (۱۷)، تابع توزیع غلظت آلودگی برای یک شاخه از رودخانه برحسب مکان

و متغیر s به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_{ij}(x, s) = \left[\frac{A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}} - A_{ij} C_i(s) e^{-\xi_{ij}(s)}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} + \frac{\eta_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \right] e^{\left(\frac{\theta_{ij} + \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x} + \left[\frac{A_{ij} C_i(s) e^{\xi_{ij}(s)} - A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} - \frac{\eta_{ij}(s)}{a_{ij}(s)} \right] e^{\left(\frac{\theta_{ij} - \xi_{ij}(s)}{L_{ij}}\right)x} + g(x, s, Q_{ij}(y, s), f_{ij}(y)) \quad \text{رابطه ۲۳}$$

تعمیم حل تحلیلی انجام شده برای یک شاخه رودخانه به شبکه رودخانه

پس از حل معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی با لحاظ عبارت منبع گسترده در یک شاخه از رودخانه، مسئله اصلی نحوه اتصال شاخه‌ها در یک شبکه رودخانه می‌باشد، به همین منظور، فرض می‌شود که با حرکت از یک شاخه به شاخه دیگر، غلظت آلودگی به طور مداوم دچار تغییر شود. در همین راستا، به منظور تعمیم حل انجام شده در یک شاخه رودخانه به شبکه رودخانه، معادله بیلان جرم لاپلاس‌گیری شده رابطه (۹) یک معادله کلیدی است، پس در این صورت با در نظر گرفتن معادله (۲۳) و انجام تغییرات لازم آن برای قرار دادن در معادله (۹)، معادلات زیر حاصل می‌شوند.

$$\left\{ \begin{aligned} D_{ij} \frac{\partial C_{ij}(x, s)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \left(\frac{V_{ij} + a_{ij}(s)}{2} \right) \left(\frac{A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}} - A_{ij} C_i(s) e^{-\xi_{ij}(s)}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \right) \\ &+ \left(\frac{V_{ij} - a_{ij}(s)}{2} \right) \left(\frac{A_{ij} C_i(s) e^{\xi_{ij}(s)} - A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \right) + \eta_{ij}(s) \\ V_{ij} C_{ij}(0, s) &= V_{ij} \left(\frac{A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}} - A_{ij} C_i(s) e^{-\xi_{ij}(s)}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \right) \\ &+ V_{ij} \left(\frac{A_{ij} C_i(s) e^{\xi_{ij}(s)} - A_{ij} C_j(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \right) \end{aligned} \right. \quad \text{رابطه ۲۴}$$

با جایگذاری معادلات (۲۴) در رابطه (۹)، معادله نهایی بیلان جرم در شبکه رودخانه به صورت زیر به دست می آید:

$$\varphi_i(s) = \sum_j \left[A_{ij} C_i(s) \left\{ \frac{V_{ij}}{2} + \frac{\alpha_{ij}(s)}{2 \tanh(\xi_{ij}(s))} \right\} - A_{ij} C_j(s) \left\{ \frac{\alpha_{ij}(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} \right\} \right] - \sum_j \eta_{ij}(s) \quad \text{رابطه ۲۵}$$

معادله بالا در قالب ماتریس به شکل زیر بیان می شود:

$$R(s) \bar{C}(s) = \bar{\Gamma}(s) \quad \text{رابطه ۲۶}$$

که در آن:

$$\Gamma_i(s) = \varphi_i(s) + \sum_j \eta_{ij}(s) \quad \text{رابطه ۲۷}$$

$$R_{ij}(s) = \begin{cases} \sum_k A_{ik} \left[\frac{V_{ik}}{2} + \frac{\alpha_{ik}(s)}{2 \tanh(\xi_{ik}(s))} \right] & i = j \\ \frac{-A_{ij} \alpha_{ij}(s) e^{-\theta_{ij}}}{2 \sinh(\xi_{ij}(s))} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{رابطه ۲۸}$$

رابطه (۲۶) نشان می دهد که، برای هر هر گره i در شبکه رودخانه، یک معادله خطی در $C_1(s), C_2(s), \dots, C_n(s)$ ، جایی که n تعداد

گره هاست، وجود دارد، بنابراین $\bar{C}(s)$ و $\bar{\Gamma}(s)$ به صورت ماتریس های تک ستونی خواهند بود. در رابطه (۲۶)، $R(s)$ ماتریس پخشیدگی یا انتشار نام دارد، که به صورت یک ماتریس نامتقارن $n \times n$ بوده و برای هر گره در شبکه رودخانه یک سطر و یک ستون دارد. در رابطه (۲۷)، عبارت مربوط به اثر شرط اولیه و عبارت منبع بوده، که از یک رابطه انتگرالی تشکیل شده است. این ترم در اثر حل

معادله ODE ناهمگن معادله (۶) و از طریق جواب خصوصی آن وارد محاسبات شده است. در صورت صرف نظر کردن از اثر عبارت منبع و شرط اولیه، $\sum_j \eta_{ij}(s) = 0$ خواهد بود که در این صورت $\Gamma_i(s) = \varphi_i(s)$ می شود. در خصوص اطلاعات بیشتر در مورد ماتریس انتشار به

پیوست مقاله مراجعه شود. با توجه به رابطه (۲۶)، با معلوم بودن ماتریس های $\bar{\Gamma}(s)$ (ماتریس معلومات برحسب متغیر s لاپلاس) و $R(s)$ (ماتریس ضرایب برحسب متغیر s لاپلاس) از طریق محاسبه، می توان $\bar{C}(s)$ را برحسب متغیر s لاپلاس با استفاده از الگوریتم های عددی حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی محاسبه نمود و در انتها مقادیر غلظت در هر گره را با استفاده از الگوریتم های لاپلاس گیری وارون عددی به دست آورد. در زمینه الگوریتم های عددی لاپلاس وارون، چارچوب آیت-ویت (Abate & Whitt, 2006) جزء پرکاربردترین روش در بین سایر روش ها بوده، که از روش های رایج این چارچوب می توان به روش های گاور-استهفست (Stehfest, 1970)، تالبوت (Talbot, 1979)، اولر (Abate et al., 2000) و توزیع نمایی ماتریس متمرکز (CME) (Horváth et al., 2020; Horváth et al., 2020) اشاره نمود. در پژوهش حاضر، از روش CME به دلیل دقت بالاتر، سرعت محاسبات بیشتر، پایداری از نظر عددی تا مرتبه ۱۰۰۰ و عدم ایجاد امواج نوسانی در آن (Horváth et al., 2020) استفاده شده است. لازم به ذکر است که، تمامی داده های جریان (سرعت)، هندسی (سطح مقطع و طول شاخه ها) و آلاینده (ضرایب زوال واکنش و پراکندگی) به صورت ماتریس هایی با درایه های مشخص براساس ماتریس نحوه اتصال پر و مقدار دهی می شوند و هر درایه از هر کدام از ماتریس ها بیان گر ویژگی های یک شاخه از شبکه رودخانه مورد نظر خواهد بود. ماتریس نحوه اتصال به عنوان مهم ترین داده ورودی به مدل، یک ماتریس $n \times n$ بوده (که n برابر تعداد کل گره هاست) و به صورت درایه های صفر و یک بیان می شود. به عبارتی دیگر، برای شبکه رودخانه اگر اتصال وجود نداشته باشد، مقدار درایه برای دو گره مورد نظر برابر با یک و در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود. در این پژوهش به منظور به کارگیری از حل تحلیلی پیشنهادی از نرم افزارهای برنامه نویسی استفاده می شود.

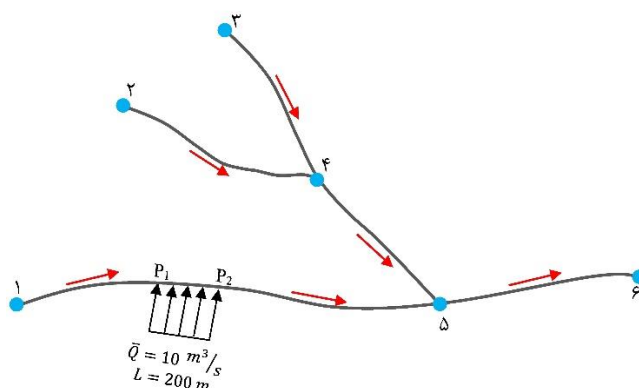
تعریف مثال های ارائه شده از شبکه های رودخانه جهت شبیه سازی

در این بخش، به منظور ارزیابی و کاربرد حل تحلیلی پیشنهادی دو مثال ارائه شده است که در مثال اول، یک منبع آلاینده فعال گسترده (غیرنقطه ای) با طولی به اندازه ۲۰۰ متر، در یک شبکه رودخانه شاخه ای در قسمت ابتدایی شاخه اصلی شبکه مورد نظر (شکل (۲)) قرار گرفته و غلظت آلودگی ورودی دلخواه از مرزهای شبکه را دستخوش تغییراتی می کند. در مثال دوم نیز همانند مثال اول، یک منبع آلاینده غیرنقطه ای با یک طول ۲۰۰ متری، در یک شبکه رودخانه حلقه ای، در بخش میانی شاخه اصلی آن، وارد سیستم شده (شکل

(۳) و غلظت آلودگی‌های ورودی از مرزها را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در ادامه نیز، نمای هر یک از شبکه‌های رودخانه دلخواه به همراه مشخصات آن‌ها ذکر شده است.

مثال اول: مدل‌سازی شبکه رودخانه شاخه‌ای با الگوی شرایط مرزی دلخواه و وجود یک منبع آلاینده فعال گسترده

در مثال اول، به بررسی عملکرد حل تحلیلی موجود با روش تبدیل لاپلاس به‌عنوان عبارت منبع گسترده در یک شبکه رودخانه شاخه‌ای پرداخته می‌شود. شکل (۲) نمای شماتیک یک شبکه رودخانه شاخه‌ای با جهت جریان در هر شاخه آن پس از نامگذاری گره‌ها را نشان می‌دهد. تمامی مشخصات جریان، هندسی و آلاینده شبکه رودخانه شاخه‌ای مورد نظر در جدول (۱) آمده است، که این مقادیر بایستی به‌صورت ماتریس‌هایی با درایه‌های مشخص به‌عنوان ورودی به مدل داده شوند. همچنین در این مدل‌سازی از تاثیر مکانیزم واکنش صرف نظر شده است. همان‌طور که در شکل (۲) ملاحظه می‌شود، یک منبع آلاینده غیرنقطه‌ای (گسترده) با دبی تخلیه گسترده ۱۰ مترمکعب بر ثانیه بر متر به‌صورت بارگذاری با سطح تخلیه‌ای به طول ۲۰۰ متر، در شاخه ۱۵ وارد شبکه مورد نظر می‌شود.



شکل ۲. نمای شماتیک شبکه رودخانه شاخه‌ای با جهت جریان در هر شاخه آن

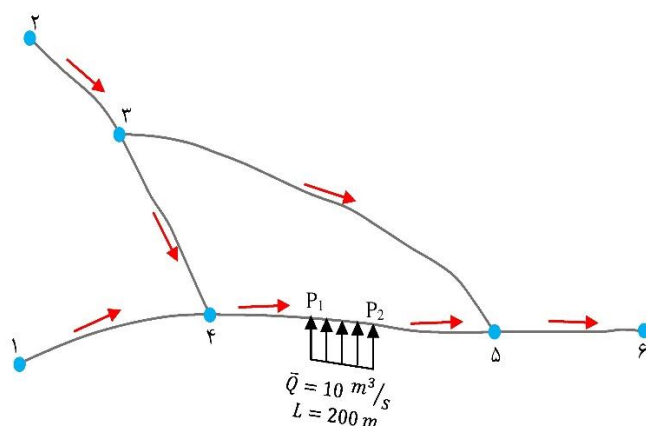
جدول ۱. مشخصات جریان و آلاینده تخلیه شده در شبکه شاخه‌ای

مسیر	s	$L(km)$	$V(m/s)$	$D(m^2/s)$	$Q(m^3/s)$
۱۵	۰/۰۰۰۱	۶	۰/۳۸۷	۱۸	۱۴*
۵۶	۰/۰۰۰۱	۴	۱/۰۰۶	۱۰	۴۰
۲۴	۰/۰۰۰۱	۳	۰/۱۹۴	۱۵	۷
۳۴	۰/۰۰۰۱	۳	۰/۲۵	۲۵	۹
۴۵	۰/۰۰۰۱	۲	۰/۴۳۲	۸	۱۶

* دبی ورودی شاخه ۱۵ برابر ۱۴ مترمکعب بر ثانیه می‌باشد، اما در کیلومترهای ۴ تا ۴/۲ کیلومتری دبی گسترده ۱۰ مترمکعب بر ثانیه بر متر در نتیجه ورود منبع آلودگی گسترده وارد شاخه ۱۵ می‌شود.

مثال دوم: مدل‌سازی شبکه رودخانه حلقه‌ای با الگوی شرایط مرزی دلخواه و وجود یک منبع آلاینده فعال غیرنقطه‌ای

در این مثال، به منظور ارزیابی عملکرد حل تحلیلی پیشنهادی با رویکرد تبدیل لاپلاس با لحاظ عبارت منبع گسترده، شبیه‌سازی‌ای برای یک شبکه رودخانه حلقه‌ای انجام خواهد گرفت، که بدین منظور، شبکه رودخانه حلقه‌ای مطابق با شکل (۳) در نظر گرفته شده و مشخصات جریان، هندسی و آلاینده آن شامل شیب شاخه‌ها (S)، سرعت جریان (V)، ضریب پراکندگی (D)، طول هر شاخه (L) و دبی جریان (Q) در جدول (۲) آورده شده است. همچنین، ضریب زوال واکنش در تمامی شاخه‌ها برابر با صفر لحاظ شده است. لازم به‌ذکر است که، تمامی داده‌های ورودی جدول بایستی به‌صورت ماتریس‌هایی با درایه‌های مشخص که براساس ماتریس نحوه اتصال پر و مقداردهی می‌شوند، به مدل تحلیلی به‌عنوان ورودی داده شوند. با توجه به شکل (۳)، یک منبع آلاینده گسترده‌ای با توزیع دبی گسترده برابر با ۱۰ مترمکعب بر ثانیه بر متر در شاخه ۴۵ با سطح تخلیه‌ای به طول ۲۰۰ متر وارد شبکه حلقه‌ای می‌شود و دو مسیر ۲۳۴۵ و ۱۴۵۶ را تحت تاثیر قرار می‌دهد.



شکل ۳. نمای شماتیک شبکه رودخانه حلقه‌ای با جهت جریان در هر شاخه آن

جدول ۲. مشخصات جریان و آلاینده تخلیه شده در شبکه حلقه‌ای

مسیر	s	$L(km)$	$V(m/s)$	$D(m^2/s)$	$Q(m^3/s)$
۱۴	۰/۰۰۰۱	۳	۰/۳۸۱	۲۰	۱۰
۴۵	۰/۰۰۰۴	۴	۰/۵۴۳	۱۰	۱۵/۵۰۹*
۵۶	۰/۰۰۰۱	۳	۱/۱۸۹	۲۵	۴۰
۲۳	۰/۰۰۰۵	۳	۱/۲۵	۸	۲۰
۳۴	۰/۰۰۰۵	۴	۰/۲۷	۱۵	۵/۵۰۹
۳۵	۰/۰۰۰۷۲	۵	۰/۵۷	۱۷	۱۴/۴۹۱

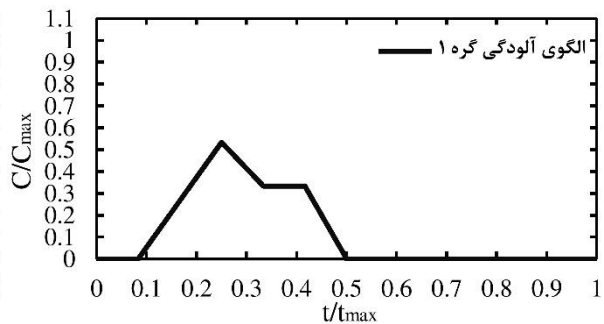
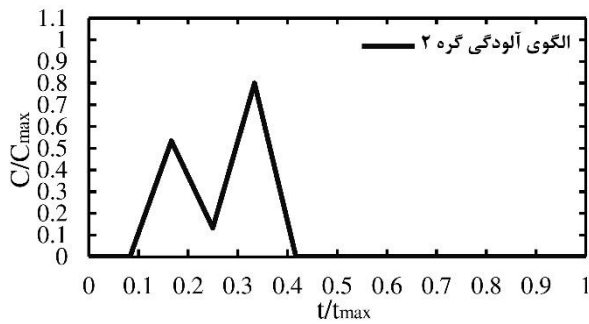
* دبی ورودی شاخه ۴۵ برابر ۱۵/۵۰۹ مترمکعب بر ثانیه می‌باشد، اما در کیلومترهای ۵ تا ۵/۲ کیلومتری، توزیع دبی گسترده ۱۰ مترمکعب بر ثانیه بر متر در نتیجه ورود منبع آلودگی گسترده وارد شاخه ۴۵ می‌شود.

نتایج و بحث

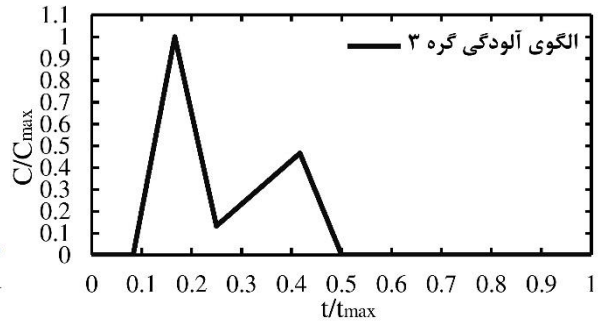
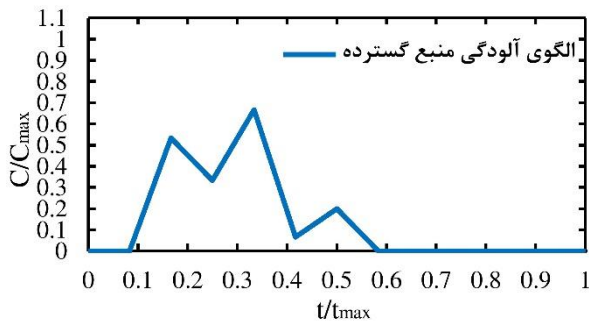
به منظور ارزیابی حل تحلیلی استخراج شده با به کارگیری روش تبدیل لاپلاس برای شبکه رودخانه، نتایج حاصل از شبیه‌سازی تحلیلی در قالب دو مثال مجزا ارائه شده است. یکی از مهم‌ترین مزیت‌های روش تحلیلی پیشنهادی در این پژوهش، نسبت به پژوهش‌های (2008) Zhang et al. و (2009) Kilic & Aral که مبتنی بر روش جداسازی عددی معادله انتقال آلودگی در شبکه رودخانه می‌باشند، می‌توان به عدم وجود محدودیت شرط پایداری، محدودیت انتخاب گام مکانی و زمانی مناسب و عدم پیدایش خطای پراکندگی عددی اشاره نمود، که این موارد در حل تحلیلی موجود در این پژوهش وجود ندارد. همچنین روش پیشنهادی در مقایسه با دو پژوهش فوق و همین‌طور پژوهش (2019) Deng دارای دقت و عملکرد بالاتری می‌باشد. از مهم‌ترین نقاط قوت این پژوهش لحاظ عبارت منبع گسترده در معادله انتقال آلودگی است که در پژوهش‌های مذکور این ترم لحاظ نشده است. همچنین، می‌توان اذعان داشت که تاکنون منبع آلودگی گسترده‌ای که به صورت یک طول معین در طول یک مسیر از یک شبکه رودخانه، یا یک شاخه رودخانه و یا محیط متخلخل وارد سیستم شود در بین پژوهش‌ها وجود نداشته و تنها منبع آلودگی به صورت نقطه‌ای (آلودگی از نوع محلول به صورت آلودگی واکنش‌پذیر درجه ۱ توزیع شده است) (Mashhadgarme et al., 2017, 2020, 2021) یا به صورت پیوسته در کل مسیر بوده است (Sanskritayn et al., 2018, 2021).

نتایج مدل‌سازی تحلیلی مثال اول (شبکه رودخانه شاخه‌ای)

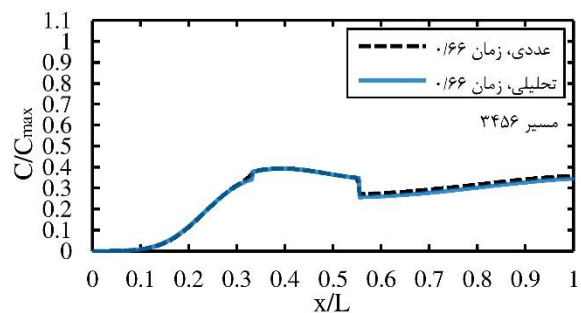
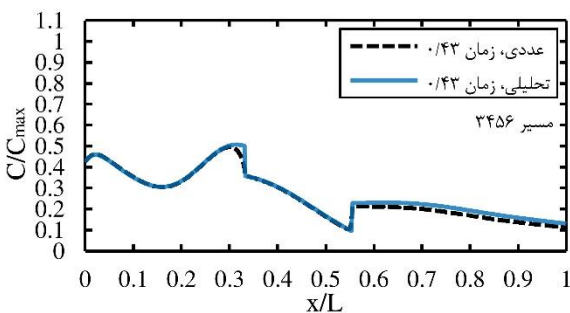
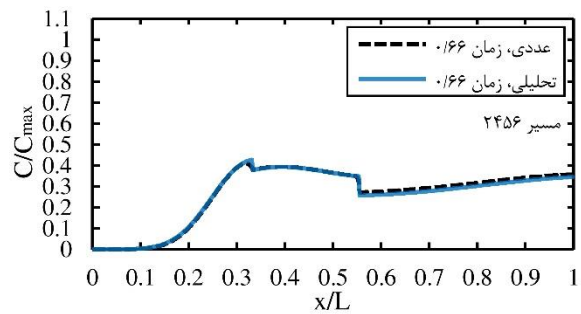
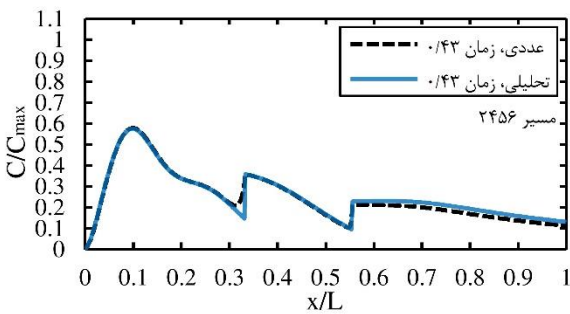
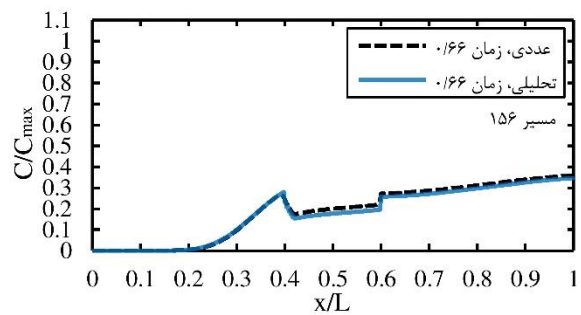
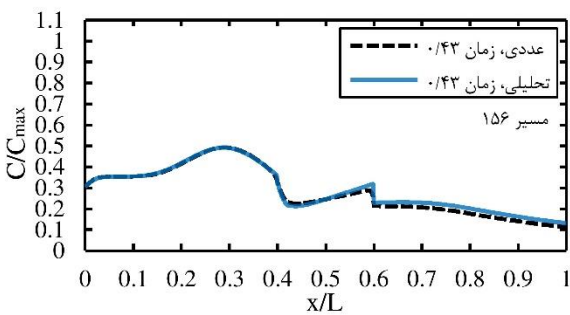
به منظور مدل‌سازی شبکه رودخانه شاخه‌ای شکل (۲)، زمان شبیه‌سازی برابر با ۱۲ ساعت و الگوی غلظت آلودگی ورودی بی‌بعد شده در نقاط ۱، ۲ و ۳ به ترتیب به صورت شکل‌های (۴) تا (۶) قابل مشاهده است. همچنین، الگوی غلظت آلودگی تخلیه شده برای منبع گسترده مورد نظر در شاخه ۱۵، به صورت شکل (۷) در نظر گرفته شده است. پس از شبیه‌سازی، نمودارهای پروفیل مکانی غلظت بی‌بعد شده برای شبکه رودخانه شاخه‌ای شکل (۲) در دو زمان بی‌بعد شده ۰/۴۳ و ۰/۶۶ برای سه مسیر ۱۵۶، ۲۴۵۶ و ۳۴۵۶ مطابق با شکل (۸) می‌باشد. همچنین مقایسه آماری دو حل تحلیلی و عددی برای شبکه مورد نظر در قالب جدول (۳) آمده است.



شکل ۱. الگوی غلظت آلودگی ورودی از نقطه ۱ شکل ۲. الگوی غلظت آلودگی ورودی از نقطه ۲



شکل ۳. الگوی غلظت آلودگی ورودی از نقطه ۳ شکل ۴. الگوی غلظت آلودگی ورودی از منبع گسترده



شکل ۸. مقایسه نمودار پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی با لحاظ عبارت منبع گسترده در شبکه رودخانه شاخه‌ای در دو زمان بی‌بعد

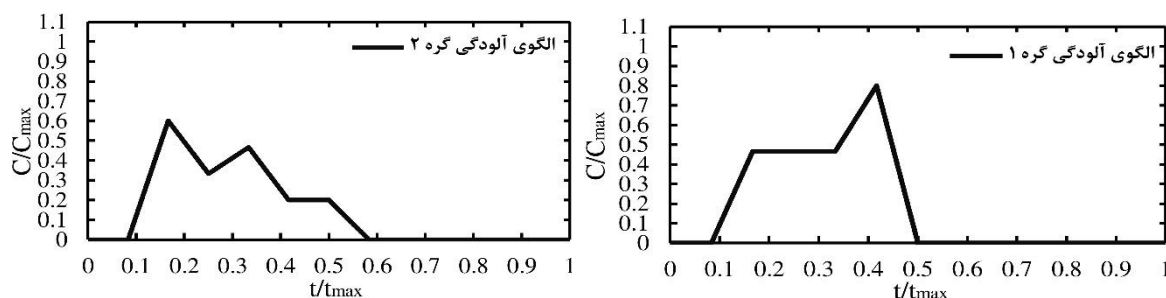
همان طور که در شکل (۸) ملاحظه می شود، در هر یک از زمان های بی بعد شده مذکور، نمودارهای پروفیل مکانی غلظت حاصله از هر دو حل تحلیلی و عددی برای سه مسیر مورد نظر تقریباً بر یکدیگر منطبق هستند، که این مورد نشان دهنده عملکرد مطلوب و توانایی بالای حل تحلیلی حاصله می باشد. علاوه بر این، انطباق دو حل تحلیلی و عددی مذکور، باتوجه به شاخص های آماری ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع خطاها ($RMSE$) و میانگین خطای مطلق (MAE) محاسبه شده در جدول (۳) کاملاً گویا می باشد. در مسیر ۱۵۶ در شکل (۸)، اثر ترم منبع گسترده ورودی به این مسیر در کیلومتر ۰/۴ به بعد قابل مشاهده بوده که در نتیجه بارگذاری گسترده ورودی به شاخه ۱۵، غلظت در این مسیر تقویت شده و چون الگوهای آلودگی در نظر گرفته شده برای مدل سازی، به صورت نامنظم متغیر با زمان می یابند، در انتها با گذشت زمان، غلظت های آلودگی در سه مسیر به تدریج از کل شبکه مورد نظر خارج می شوند. لازم به ذکر است که روندهای کاهشی و یا افزایشی غلظت در محل های اتصال شاخه ها به یکدیگر، در نتیجه بارگذاری (حاصل ضرب دبی در غلظت) مثبت از شاخه فرعی می باشد، که اگر این بارگذاری حاصله باعث برآیند غلظت مثبت شود، سبب افزایش غلظت و بالعکس، اگر باعث برآیند منفی غلظت گردد، سبب کاهش غلظت در محل های اتصال می گردد. همان طور که در جدول (۳) ملاحظه می شود، باتوجه به مقایسه آماری دو حل تحلیلی و عددی در این پژوهش برای شبکه رودخانه شاخه ای فرضی شکل (۲)، شاخص های خطای آماری R^2 ، جذر میانگین مربع خطاها ($RMSE$) و میانگین خطای مطلق (MAE) در بهترین حالت، به ترتیب برابر با ۰/۹۹/۷۱٪، ۰/۰۱۴ کیلوگرم بر مترمکعب و ۰/۰۱۰۱ کیلوگرم بر مترمکعب متعلق به مسیر ۳۴۵۶ در زمان بی بعد ۰/۶۶ محاسبه شد و در بدترین حالت انطباق نیز به ترتیب برابر با ۰/۹۷/۹۶٪، ۰/۰۲۷۷ کیلوگرم بر مترمکعب و ۰/۰۱۷۹ کیلوگرم بر مترمکعب مربوط به مسیر ۲۴۵۶ در زمان بی بعد ۰/۴۳ محاسبه گردید، که این اعداد نشان دهنده انطباق بسیار خوب دو حل تحلیلی و عددی در شبکه رودخانه شاخه ای شکل (۲) می باشد.

جدول ۳. مقایسه آماری پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص های آماری برای شبکه رودخانه شاخه ای

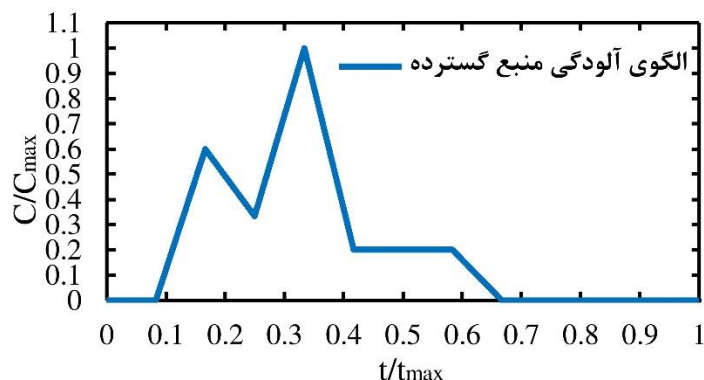
مسیر و زمان	$RMSE$ (kg / m^3)	MAE (kg / m^3)	R^2 (%)
۱۵۶، زمان ۰/۴۳	۰/۰۲۱۶	۰/۰۱۶۳	۹۹/۲۹
۱۵۶، زمان ۰/۶۶	۰/۰۱۹۴	۰/۰۱۵۲	۹۹/۶۲
۲۴۵۶، زمان ۰/۴۳	۰/۰۲۷۷	۰/۰۱۷۹	۹۷/۹۶
۲۴۵۶، زمان ۰/۶۶	۰/۰۱۴۲	۰/۰۱۰۵	۹۹/۶۳
۳۴۵۶، زمان ۰/۴۳	۰/۰۲۴۲	۰/۰۱۶۶	۹۸/۸۵
۳۴۵۶، زمان ۰/۶۶	۰/۰۱۴	۰/۰۱۰۱	۹۹/۷۱

نتایج مدل سازی تحلیلی مثال دوم (شبکه رودخانه حلقه ای)

به منظور شبیه سازی شبکه رودخانه حلقه ای شکل (۳)، زمان کل شبیه سازی برابر با ۱۲ ساعت بوده و آلودگی های مورد نظر به صورت الگوهای غلظت بی بعد شده نامنظم متغیر با زمان مطابق شکل های (۹) و (۱۰) به ترتیب از مرزهای ۱ و ۲ به همراه الگوی منبع آلاینده گسترده وارده به شاخه ۴۵ به صورت شکل (۱۱) در کیلومترهای ۵ تا ۵/۲ کیلومتری، وارد سیستم شبکه رودخانه حلقه ای مدنظر می شوند. بعد از شبیه سازی مثال فرضی مورد نظر، نتایج حاصله در قالب پروفیل های مکانی غلظت آلودگی بی بعد شده در طی دو زمان بی بعد ۰/۴۵۱ و ۰/۶۴۸ برای سه مسیر ۱۴۵۶، ۲۳۴۵۶ و ۲۳۵۶ مطابق شکل (۱۲) ارائه شده است. در ادامه نیز، به جهت مقایسه دو حل تحلیلی و عددی در این پژوهش، از شاخص های خطای آماری استفاده شده است، که نتایج آماری آن برای شبکه رودخانه حلقه ای مدنظر در جدول (۴) قابل مشاهده می باشد.



شکل ۹. الگوی غلظت آلودگی ورودی از نقطه ۱. شکل ۱۰. الگوی غلظت آلودگی ورودی از نقطه ۲



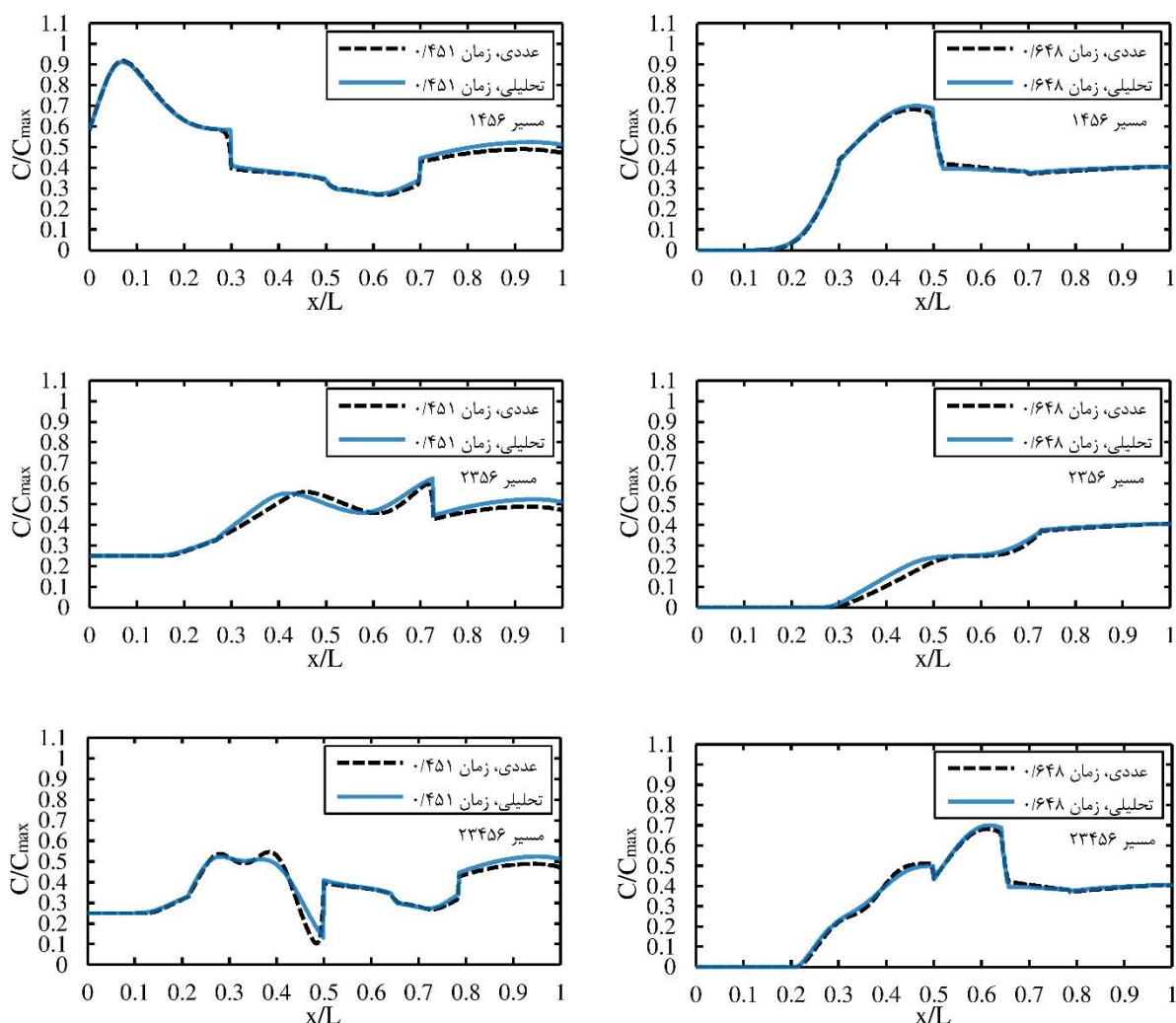
شکل ۱۱. الگوی غلظت آلودگی ورودی از منبع آلاینده گسترده

باتوجه به شکل (۱۲)، می‌توان اذعان داشت که پروفیل‌های مکانی غلظت برای دو حل تحلیلی در هر دو زمان مورد نظر برای هر سه مسیر مذکور دارای انطباق خیلی خوبی با یکدیگر هستند، که این مورد باتوجه به شاخص‌های خطای آماری محاسبه شده در جدول (۴) کاملاً صدق می‌کند. همان‌طور که در شکل (۱۲) مشاهده می‌شود، آلودگی ناشی از منبع غیرنقطه‌ای دو مسیر ۱۴۵۶ و ۲۳۴۵۶ را به ترتیب در کیلومترهای بی‌بعد ۰/۵ و تقریباً ۰/۶۴ به بعد را تحت تاثیر قرار داده و اثر آن در روند افزایشی یا کاهش غلظت در اثر برآیندهای مثبت و یا منفی غلظت آلودگی کاملاً مشخص است. همچنین باتوجه به شکل (۱۲) می‌توان اشاره نمود که عواملی همچون تفاوت مقدار سطح مقطع و دبی جریان هر شاخه در شبکه مورد نظر باعث گردیده تا برآیند غلظت آلودگی در نتیجه بارگذاری مثبت، در محل‌های اتصال مثبت و یا منفی شود، که در نتیجه تغییرات کاهش و یا افزایشی غلظت در محل‌های اتصال را به دنبال دارد.

جدول ۴. مقایسه آماری پروفیل مکانی دو حل تحلیلی و عددی با استفاده از شاخص‌های آماری برای شبکه رودخانه حلقه‌ای

مسیر و زمان	R^2 (%)	MAE (kg / m^3)	RMSE (kg / m^3)
۱۴۵۶، زمان ۰/۴۵۱	۹۹/۲۶	۰/۰۱۵۲	۰/۰۲۲۶
۱۴۵۶، زمان ۰/۶۴۸	۹۹/۸۶	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۹۹
۲۳۴۵۶، زمان ۰/۴۵۱	۹۵/۲۰	۰/۰۱۹۴	۰/۰۳۰۹
۲۳۴۵۶، زمان ۰/۶۴۸	۹۹/۷۵	۰/۰۰۹۲	۰/۰۱۲۹
۲۳۵۶، زمان ۰/۴۵۱	۹۶/۲۸	۰/۰۲۵	۰/۰۳۰۹
۲۳۵۶، زمان ۰/۶۴۸	۹۹/۲۱	۰/۰۱۲۷	۰/۰۲۱۳

باتوجه به شکل (۱۲)، برای دو مسیر ۲۳۴۵۶ و ۲۳۵۶ در کیلومترهای ۰/۴ تا ۰/۵ اختلاف بسیار جزئی بین نمودار دو حل تحلیلی و عددی مشاهده می‌شود، که این اختلاف به دلیل وجود خطاهای رایج عددی نظیر، خطای گرد کردن، خطای کوتاه کردن جملات ریاضی و به‌ویژه خطای پراکندگی عددی می‌باشد و قابل صرف نظر کردن است. باتوجه به جدول (۴)، براساس مقایسه آماری دو حل تحلیلی و عددی در این مطالعه برای شبکه رودخانه حلقه‌ای دلخواه شکل (۸)، شاخص‌های خطای آماری محاسبه شده R^2 ، جذر میانگین مربع خطاها (RMSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) در بهترین حالت انطباق، به ترتیب برابر با ۹۹/۸۶٪، ۰/۰۰۹۹ کیلوگرم بر مترمکعب و ۰/۰۰۶۷ کیلوگرم بر مترمکعب متعلق به مسیر ۱۴۵۶ در زمان بی‌بعد ۰/۶۴۸ بوده و در بدترین حالت نیز به ترتیب برابر با ۹۵/۲۰٪، ۰/۰۳۰۹ کیلوگرم بر مترمکعب و ۰/۰۱۹۴ کیلوگرم بر مترمکعب مربوط به مسیر ۲۳۴۵۶ در زمان بی‌بعد ۰/۴۵۱ می‌باشد، که این اعداد نشان‌دهنده انطباق بسیار عالی دو حل تحلیلی و عددی در این مطالعه برای شبکه رودخانه حلقه‌ای دلخواه شکل (۳) می‌باشد.



شکل ۱۲- مقایسه نمودار پروفیل مکانی غلظت دو حل تحلیلی و عددی با لحاظ عبارت منبع گسترده در شبکه رودخانه حلقه‌ای در دو زمان بی‌بعد شده ۰/۴۵۱ و ۰/۶۴۸

نتیجه‌گیری

در شبکه‌های رودخانه برای مدل‌سازی انواع آلودگی‌های نقطه‌ای و به‌ویژه گسترده در طول مسیر آن علاوه بر مرزها، لازم است عبارت منبع در معادله انتقال آلودگی لحاظ شود، بنابراین، مهم‌ترین نوآوری این پژوهش، استخراج حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی با لحاظ عبارت منبع گسترده و شرط اولیه با استفاده از روش تبدیل لاپلاس در یک دامنه محدود با شرایط مرزی ورودی و خروجی از نوع اول برای شبکه رودخانه عام می‌باشد. به‌منظور کاربرد حل تحلیلی پیشنهادی، شبیه‌سازی‌هایی بر روی دو مثال فرضی مجزا برای دو نوع شبکه رودخانه شاخه‌ای و حلقه‌ای، که هر یک با وجود یک منبع آلاینده فعال گسترده با الگوی نامنظم و شرایط مرزی دلخواه بودند، انجام شد و نتایج هر مثال به‌طور جداگانه به‌صورت نمودارهای پروفیل مکانی غلظت برای هر مسیر در مقایسه با حل عددی ارائه شد. از توانمندی روش تحلیلی پیشنهادی، می‌توان به شبیه‌سازی انواع شبکه‌های رودخانه‌ای اعم از شاخه‌ای و حلقه‌ای با در نظر گرفتن انواع الگوهای آلودگی منظم و نامنظم دلخواه برای شرایط مرزی و عبارت منبع گسترده اشاره کرد. با توجه به این پژوهش، می‌توان اذعان داشت که روش تحلیلی تبدیل لاپلاس ابزاری قدرتمند در حل مسائل پیچیده معادلات دیفرانسیل جزئی نا همگن از جمله معادله ADRE با لحاظ عبارت منبع می‌باشد، که ضمن کاربری آسان نسبت به سایر روش‌های تحلیلی، در آن نیازی به همگن کردن شرایط مرزی نسبت به روش‌های دیگر مانند روش GITT نمی‌باشد، اما این روش در کنار مزایای آن، دارای محدودیتی نیز می‌باشد، که می‌توان به لاپلاس‌گیری وارون اشاره نمود، چراکه در توابع پیچیده محاسبه شده برحسب متغیر لاپلاس s امکان وارون‌گیری لاپلاس به‌صورت تحلیلی وجود ندارد، بنابراین، بایستی از الگوریتم‌های لاپلاس‌گیری عددی‌ای استفاده نمود که دقت و سرعت محاسبات بالاتری داشته باشند، که در این پژوهش الگوریتم کارآمد

CME این مشکل را برطرف نموده است. لازم به ذکر است که، در صورت پیچیدگی زیاد و بزرگتر شدن یک شبکه رودخانه در روش ارائه شده، ابعاد ماتریس‌های ورودی از جمله ماتریس سرعت، ماتریس ضریب پراکندگی و ... بیشتر شده و به تبع آن دستگاه معادلات جبری غیرخطی بزرگ‌تر می‌شود، که این مورد افزایش هزینه محاسباتی و زمان شبیه‌سازی را به دنبال خواهد داشت. همچنین، این پژوهش نشان داد که حل تحلیلی موجود دارای انطباق بسیار خوبی با حل عددی بوده و این مورد باتوجه به شاخص‌های خطای آماری محاسبه شده نظیر، ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع خطاها ($RMSE$) و میانگین خطای مطلق (MAE) برای دو حل کاملاً گویا می‌باشد و باتوجه به دقت بالا و عملکرد مناسب حل تحلیلی پیشنهادی، می‌توان اشاره نمود که به دلیل وجود خطاهای رایج در حل‌های عددی، روش تحلیلی موجود می‌تواند به عنوان ابزاری جهت صحت‌سنجی حل‌های عددی در شبکه رودخانه باشد.

پیوست

شکل کلی پاسخ اختصاصی معادله (۶) به صورت رابطه (۲۹) بیان می‌شود:

$$g(x, s, \psi_{ij}(y, s)) = Z_1(x)C_1(x, s) + Z_2(x)C_2(x, s) \quad \text{رابطه (۲۹)}$$

در رابطه (۲۹)، ضرایب $Z_1(x)$ و $Z_2(x)$ با روش تحلیلی لاگرانژ به صورت روابط زیر به دست می‌آیند:

$$Z_1(x) = \frac{1}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{-\left(\xi_{ij}(s) + \theta_{ij}\right) \frac{y}{L_{ij}}} \psi_{ij}(y, s) dy \quad \text{رابطه (۳۰)}$$

$$Z_2(x) = -\frac{1}{a_{ij}(s)} \int_0^x e^{\left(\xi_{ij}(s) - \theta_{ij}\right) \frac{y}{L_{ij}}} \psi_{ij}(y, s) dy \quad \text{رابطه (۳۱)}$$

با جایگذاری روابط (۳۰) و (۳۱) در معادله (۲۹)، رابطه (۱۵) به دست می‌آید.

توضیحات تکمیلی ماتریس انتشار:

در زمینه ماتریس انتشار یعنی رابطه (۲۶)، لازم به ذکر است که، عناصر قطری ماتریس انتشار همگی مثبت و براساس رابطه بالایی آن محاسبه شده و عناصر غیرقطری آن در صورت وجود اتصال دارای مقادیر منفی بوده و براساس رابطه پایینی آن محاسبه می‌شوند، همچنین، اگر اتصالی بین گره i و j وجود نداشته باشد، درایه ماتریس انتشار برابر با صفر خواهد بود. به عنوان مثال ماتریس انتشار شکل (۳)، به صورت زیر می‌باشد:

$$R(s) = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & -R_{14} & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & -R_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_{32} & R_{33} & -R_{34} & -R_{35} & 0 \\ -R_{41} & 0 & R_{43} & R_{44} & -R_{45} & 0 \\ 0 & 0 & -R_{53} & -R_{54} & R_{55} & -R_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R_{65} & R_{66} \end{bmatrix} \quad \text{رابطه (۳۲)}$$

"هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان وجود ندارد"

REFERENCES

- Abate, J., Choudhury, G. L., & Whitt, W. (2000). An introduction to numerical transform inversion and its application to probability models. In *Computational probability* (pp. 257-323). Springer.
- Abate, J., & Whitt, W. (2006). A unified framework for numerically inverting Laplace transforms. *INFORMS Journal on Computing*, 18(4), 408-421.
- Amiri, S., Mazaheri, M., & Bavandpouri Gilan, N. (2021). Introducing a new method for calculating the spatial and temporal distribution of pollutants in rivers. *International Journal of Environmental Science and Technology*, 18(12), 3777-3794.
- Bharati, V. K., Singh, V. P., Sanskrityayn, A., & Kumar, N. (2017). Analytical solution of advection-dispersion equation with spatially dependent dispersivity. *Journal of Engineering Mechanics*, 143(11), 04017126.
- Bharati, V. K., Singh, V. P., Sanskrityayn, A., & Kumar, N. (2018). Analytical solutions for solute transport from varying pulse source along porous media flow with spatial dispersivity in fractal & Euclidean framework. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 72, 410-421.
- Bharati, V. K., Singh, V. P., Sanskrityayn, A., & Kumar, N. (2019). Analytical solution for solute transport

- from a pulse point source along a medium having concave/convex spatial dispersivity within fractal and Euclidean framework. *Journal of Earth System Science*, 128(8), 1-19.
- Biswal, B., & Marani, M. (2010). Geomorphological origin of recession curves. *Geophysical Research Letters*, 37(24), 5.
- Carr, E. J. (2020). New semi-analytical solutions for advection–dispersion equations in multilayer porous media. *Transport in Porous Media*, 135(1), 39-58.
- Chapra, S. C. (2008). *Surface water-quality modeling*. Waveland press.
- Chen, J.-S., Chen, J.-T., Liu, C.-W., Liang, C.-P., & Lin, C.-W. (2011). Analytical solutions to two-dimensional advection–dispersion equation in cylindrical coordinates in finite domain subject to first-and third-type inlet boundary conditions. *Journal of Hydrology*, 405(3-4), 522-531.
- Clement, T. P. (2001). Generalized solution to multispecies transport equations coupled with a first-order reaction network. *Water Resources Research*, 37(1), 157-163.
- Codeço, C. T. (2001). Endemic and epidemic dynamics of cholera: the role of the aquatic reservoir. *BMC infectious diseases*, 1(1), 1-14.
- Cotta, R. M., Knupp, D. C., & Naveira-Cotta, C. P. (2016). *Analytical heat and fluid flow in microchannels and microsystems*. Springer.
- Deng, X. (2019). Correlations between water quality and the structure and connectivity of the river network in the Southern Jiangsu Plain, Eastern China. *Science of the total environment*, 664, 583-594.
- Diamantini, E., Mallucci, S., & Bellin, A. (2019). A parsimonious transport model of emerging contaminants at the river network scale. *Hydrology and Earth System Sciences*, 23(1), 573-593.
- Edokpayi, J. N., Rogawski, E. T., Kahler, D. M., Hill, C. L., Reynolds, C., Nyathi, E., Smith, J. A., Odiyo, J. O., Samie, A., & Bessong, P. (2018). Challenges to sustainable safe drinking water: a case study of water quality and use across seasons in rural communities in Limpopo province, South Africa. *Water*, 10(2), 159.
- Fardadi Shilsar, M. J., Mazaheri, M., & Mohammad Vali Samani, J. (2022). Analytical solution of the pollution transport equation with variable coefficients in river using the Laplace Transform. *Water and Irrigation Management*, 11(4), 683-698. (In Farsi)
- Fawell, J., & Nieuwenhuijsen, M. J. (2003). Contaminants in drinking water Environmental pollution and health. *British medical bulletin*, 68(1), 199-208.
- Fedi, A., Massabò, M., Paladino, O., & Cianci, R. (2010). A new analytical solution for the 2D advection-dispersion equation in semi-infinite and laterally bounded domain. *Applied Mathematical Sciences*, 4(75), 3733-3747.
- Genuchten, M. T., Leij, F. J., Skaggs, T. H., Toride, N., Bradford, S. A., & Pontedeiro, E. M. (2013a). Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers 1. The equilibrium advection-dispersion equation. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 61(2), 146.
- Genuchten, M. T., Leij, F. J., Skaggs, T. H., Toride, N., Bradford, S. A., & Pontedeiro, E. M. (2013b). Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers. 2. Transient storage and decay chain solutions. *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, 61(3), 250-259.
- Guerrero, J. P., Pimentel, L. C. G., Skaggs, T., & Van Genuchten, M. T. (2009). Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(13-14), 3297-3304.
- Heaton, L. L., López, E., Maini, P. K., Fricker, M. D., & Jones, N. S. (2012). Advection, diffusion, and delivery over a network. *Physical Review E*, 86(2), 021905.
- Horváth, G., Horváth, I., Almousa, S. A.-D., & Telek, M. (2020). Numerical inverse Laplace transformation using concentrated matrix exponential distributions. *Performance Evaluation*, 137, 102067.
- Horváth, G., Horváth, I., & Telek, M. (2020). High order concentrated matrix-exponential distributions. *Stochastic Models*, 36(2), 176-192.
- Kilic, S. G., & Aral, M. M. (2009). A fugacity based continuous and dynamic fate and transport model for river networks and its application to Altamaha River. *Science of the total environment*, 407(12), 3855-3866.
- Koplik, J., Redner, S., & Wilkinson, D. (1988). Transport and dispersion in random networks with percolation disorder. *Physical Review A*, 37(7), 2619.
- Korn, G. A., & Korn, T. M. (2000). *Mathematical handbook for scientists and engineers: definitions, theorems, and formulas for reference and review*. Courier Corporation.
- Kreyszig, E. (2009). *Advanced engineering mathematics*, (10th ed.) Wiley.
- Leij, F. J., Skaggs, T. H., & Van Genuchten, M. T. (1991). Analytical solutions for solute transport in three-



- dimensional semi-infinite porous media. *Water Resources Research*, 27(10), 2719-2733.
- Leij, F. J., Toride, N., & Van Genuchten, M. T. (1993). Analytical solutions for non-equilibrium solute transport in three-dimensional porous media. *Journal of Hydrology*, 151(2-4), 193-228.
- Leij, F. J., & Van Genuchten, M. T. (2000). Analytical modeling of nonaqueous phase liquid dissolution with Green's functions. *Transport in Porous Media*, 38(1), 141-166.
- Mashhadgarne, N., Mohammadvali Samani, J., & Mazaheri, M. (2013). Analytical Solution of Pollution Transport Equation with Arbitrary Time Pattern of Multiple Point Sources using Green's Function Method. *Journal of Hydraulics*, 8(4), 13-25. (In Farsi)
- Mashhadgarne, N., Mazaheri, M., & Mohammad Vali Samani, J. (2017). Analytical solutions to one-and two-dimensional Advection-Dispersion-Reaction equation with arbitrary source term time pattern using Green's function method. *Sharif Journal of Civil Engineering*, 33-2, 77-91. (In Farsi)
- Mashhadgarne, N., Mazaheri, M., & Mohammad Vali Samani, J. (2019). An analytical Solution to Bi-dimensional Unsteady Contaminant Transport Equation with Arbitrary Initial and Boundary Conditions. *Hydrophysics*, 5(1), 111-123. (In Farsi)
- Mashhadgarne, N., Mazaheri, M., & Mohammad Vali Samani, J. (2020). An Analytical Solution To Two-Dimensional Unsteady Mass Transfer Equation With Arbitrary Source Term In The River. *Sharif Journal of Mechanical Engineering*, 36-3, 119-109. (In Farsi)
- Mashhadgarne, N., Mazaheri, M., & Mohammad Vali Samani, J. (2021). An Analytical solution to two-dimensional unsteady pollutant transport equation with arbitrary initial condition and source term in the open channels. *Journal of the Earth and Space Physics*, 47(1), 77-90. (In Farsi)
- Massabó, M., Cianci, R., & Paladino, O. (2006). Some analytical solutions for two-dimensional convection-dispersion equation in cylindrical geometry. *Environmental Modelling & Software*, 21(5), 681-688.
- Massabó, M., Cianci, R., & Paladino, O. (2011). An analytical solution of the advection dispersion equation in a bounded domain and its application to laboratory experiments. *Journal of Applied Mathematics*, 2011(6), 14.
- Master, L. L., Flack, S. R., & Stein, B. A. (1998). *Rivers of life: critical watersheds for protecting freshwater biodiversity*. Nature Conservancy Arlington, Virginia.
- Matthews, W. J. (2012). *Patterns in freshwater fish ecology*. Springer Science & Business Media.
- Mazaheri, M., MV Samani, J., & MV Samani, H. (2013). Analytical solution to one-dimensional advection-diffusion equation with several point sources through arbitrary time-dependent emission rate patterns. *Journal of Agricultural Science and Technology*, 15(6), 1231-1245.
- Moranda, A., Cianci, R., & Paladino, O. (2018). Analytical solutions of one-dimensional contaminant transport in soils with source production-decay. *Soil Systems*, 2(3), 40.
- Park, E., & Zhan, H. (2001). Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three-dimensional sources in a finite-thickness aquifer. *Journal of Contaminant Hydrology*, 53(1-2), 41-61.
- Pascual, M., Bouma, M. J., & Dobson, A. P. (2002). Cholera and climate: revisiting the quantitative evidence. *Microbes and infection*, 4(2), 237-245.
- Ramezani, M., Noori, R., Hooshyaripor, F., Deng, Z. and Sarang, A., (2019). Numerical modelling-based comparison of longitudinal dispersion coefficient formulas for solute transport in rivers. *Hydrological Sciences Journal*, 64(7), pp.808-819.
- Rinaldo, A., Gatto, M., & Rodriguez-Iturbe, I. (2018). River networks as ecological corridors: A coherent ecohydrological perspective. *Advances in Water Resources*, 112, 27-58.
- Rodriguez-Iturbe, I., Muneeppeerakul, R., Bertuzzo, E., Levin, S. A., & Rinaldo, A. (2009). River networks as ecological corridors: A complex systems perspective for integrating hydrologic, geomorphologic, and ecologic dynamics. *Water Resources Research*, 45(1), 1413.
- Sanskritayn, A., Bharati, V. K., & Kumar, N. (2018). Solute transport due to spatio-temporally dependent dispersion coefficient and velocity: analytical solutions. *Journal of Hydrologic Engineering*, 23(4), 04018009.
- Sanskritayn, A., Singh, V. P., Bharati, V. K., & Kumar, N. (2018). Analytical solution of two-dimensional advection-dispersion equation with spatio-temporal coefficients for point sources in an infinite medium using Green's function method. *Environmental Fluid Mechanics*, 18(3), 739-757.
- Sanskritayn, A., Suk, H., Chen, J.-S., & Park, E. (2021). Generalized Analytical Solutions of The Advection-Dispersion Equation with Variable Flow and Transport Coefficients. *Sustainability*, 13(14), 7796.
- Sanskritayn, A., Suk, H., & Kumar, N. (2017). Analytical solutions for solute transport in groundwater and riverine flow using Green's Function Method and pertinent coordinate transformation method. *Journal of Hydrology*, 547, 517-533.

- Srinivasan, V., & Clement, T. (2008a). Analytical solutions for sequentially coupled one-dimensional reactive transport problems—Part I: Mathematical derivations. *Advances in Water Resources*, 31(2), 203-218.
- Srinivasan, V., & Clement, T. (2008b). Analytical solutions for sequentially coupled one-dimensional reactive transport problems—Part II: Special cases, implementation and testing. *Advances in Water Resources*, 31(2), 219-232.
- Stehfest, H. (1970). Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]. *Communications of the ACM*, 13(1), 47-49.
- Talbot, A. (1979). The accurate numerical inversion of Laplace transforms. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 23(1), 97-120.
- Yadav, R., & Kumar, L. (2019). Solute transport for pulse type input point source along temporally and spatially dependent flow. *Pollution*, 5(1), 53-70.
- Yang, S., Zhou, H., Zhang, S., & Wang, L. (2019). Analytical solutions of advective–dispersive transport in porous media involving conformable derivative. *Applied Mathematics Letters*, 92, 85-92.
- Zhang, M.-l., Shen, Y.-m., & Guo, Y. (2008). Development and application of a eutrophication water quality model for river networks. *Journal of Hydrodynamics*, 20(6), 719-726.