

## Invers Flood Routing based on Diffusion Wave Model (A Case Study on Yuan River, China)

MAJID HEYDARI<sup>1\*</sup>, SHAHIN OODI<sup>1</sup>, FARIBA AHMADI DEHRASHID<sup>1</sup>

1. Department of Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, University of Bu Ali Sina, Hamedan, Iran.  
(Received: Nov. 4, 2019- Revised: Dec. 28, 2019- Accepted: Dec. 31, 2019)

### ABSTRACT

It is important to have a fast and accurate model for predicting incoming hydrographs in order to reduce the financial and life damage in flood forecasting systems as well as water allocation issues, especially high priority consumption. In this study, using diffusion wave model, inverse flood routing in Yuan River in China was performed using mixing cell and Crank Nicolson numerical method. These numerical methods were chosen because of their high computational speed and no need for river topographic and hydraulic information. For this purpose, Yuan River flood information data for five years were used, then the numerical simulation results were compared with observational data. Accordingly, the statistical indices of coefficient of determination, Nash-Sutcliffe index, Wilmot index and residual sum coefficient were determined. The results showed that both numerical methods have good accuracy. The maximum error for the observed and calculated maximum discharge in Crank-Nicolson and mixing cell methods were 0.22 and 0.59%, respectively. Based on the results obtained in the prediction of maximum discharge and inlet hydrograph, it was found that the Crank Nicolson method is more accurate than the mixing cell method.

**Keywords:** Crank Nicolson Method, Mixing Cell Method, Flow Routing, Diffusion Wave Method.

## روندبایی معکوس سیلاب به روش موج پخشیدگی (مطالعه موردی: رودخانه یوان واقع در کشور چین)

مجید حیدری<sup>\*</sup>، شاهین عودی<sup>۱</sup>، فریبا احمدی دهرشید<sup>۱</sup>

۱. گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بوعلی سینا، همدان، ایران.  
(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۸/۱۳ - تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱۰/۷ - تاریخ تصویب: ۱۳۹۸/۱۰/۱۰)

### چکیده

به منظور کاهش خسارات مالی و جانی در سیستم‌های پیش‌بینی و هشدار سیل و همچنین مباحث تخصیص آب به خصوص مصارف با درجه اولویت بالا در اختیار داشتن مدلی سریع و دقیق برای پیش‌بینی هیدروگراف ورودی اهمیت فراوانی دارد. در پژوهش حاضر با استفاده از مدل موج پخشیدگی اقدام به روندبایی معکوس سیل در رودخانه یوان واقع در کشور چین با استفاده از روش عددی سلول مخلوط و کرانک نیکلسون شد. این روش‌های عددی به دلیل سرعت محاسبات بالا و عدم نیاز به اطلاعات توپوگرافی و هیدرولیکی رودخانه انتخاب شدند. بدین منظور از اطلاعات سیلاب‌های رودخانه یوان در طول پنج سال استفاده شد و سپس نتایج حاصله از شبیه‌سازی عددی با داده‌های مشاهده‌ای مقایسه شد. بر این اساس شاخص‌های آماری ضریب تبیین، شاخص نش-ساتکلیف، شاخص ویلموت و ضریب مجموع باقیمانده تعیین و با بررسی این شاخص‌ها مشاهده شد که نتایج حاصله از هر دو روش عددی از دقت خوبی برخوردار بودند. حداکثر خطای بیشینه دبی مشاهده‌ای و محاسباتی در روش کرانک نیکلسون و سلول مخلوط به ترتیب ۰/۲۲ و ۰/۵۹ درصد بود. بر اساس نتایج به دست آمده در پیش‌بینی دبی بیشینه و هیدروگراف ورودی مشاهده شد که روش کرانک نیکلسون نسبت به روش سلول مخلوط دقت بالاتری دارد.

واژه‌های کلیدی: روش کرانک نیکلسون، روش سلول مخلوط، روندبایی جریان، موج پخشیدگی.

### مقدمه

یکی از مهمترین مسائلی که در هیدرولیک مجاری روباز مطرح است، تعیین مشخصات جریان ناپایدار در نقاط کلیدی رودخانه-های طبیعی است که با عنوان روندبایی سیل از آن یاد می‌شود. روندبایی سیل (Flood Routing)، در طراحی سازه‌هایی که در محدوده سیلاب قرار دارند، طراحی و بهینه‌سازی مخازن و همچنین کاهش خسارت‌های وارده به شهرها و تاسیسات مجاور رودخانه‌ها، نقش به‌سزایی دارد. روش‌های روندبایی به دو گروه کلی روندبایی هیدرولوژیکی و روندبایی هیدرولیکی تقسیم‌بندی می‌شوند. در روندبایی هیدرولوژیکی به طور کلی از معادله اندازه حرکت صرف‌نظر شده و تنها از معادله پیوستگی استفاده می‌شود، این در حالی است که در روندبایی هیدرولیکی از معادلات سنت و نانت استفاده می‌شود، این معادلات شامل معادله پیوستگی، رابطه (۱) و معادله اندازه حرکت، رابطه (۲) می‌باشد.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{رابطه ۱})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0 \quad (\text{رابطه ۲})$$

که در دو معادله بالا A سطح مقطع جریان بر حسب متر مربع، V سرعت جریان بر حسب متر بر ثانیه، g شتاب ثقل بر

حسب متر بر مجذور ثانیه،  $S_0$  شیب کف کانال و  $S_f$  شیب انرژی است.

معادلات کامل سنت و نانت یعنی مدل موج دینامیکی، بهترین حالت معادله نظری یک‌بعدی برای بررسی حرکت سیلاب می‌باشد اما استفاده از این معادلات در رودخانه‌های طبیعی با مشکلاتی روبه‌رو است. برای حل این معادلات، ضروری است اطلاعات کامل از هندسه مقطع رودخانه، شیب طولی بستر رودخانه و ضریب زبری مانینگ وجود داشته باشد. برداشت مقاطع عرضی رودخانه به لحاظ اقتصادی به صرفه نبوده و همراه با تقریب و خطا می‌باشد و باید بین مقاطع برداشت شده، درون‌یابی انجام گیرد. همچنین، پس از هر سیلاب مقاطع کانال دچار فرسایش و رسوبگذاری شده و ممکن است مقطع به طور کامل تغییر شکل بدهد. یک مسئله مهم دیگر، اندازه‌گیری ضریب زبری مانینگ و وارد کردن اثر تغییر آن در معادله کامل سنت و نانت می‌باشد زیرا ممکن است ضریب زبری در طول بازه رودخانه با تغییر دبی، تغییر کند. شیب طولی رودخانه نیز به شکل متوسط‌گیری شده در معادله کامل سنت و نانت یعنی موج دینامیکی به کار می‌رود. با در نظر گرفتن نکات بیان‌شده و عدم قطعیت موجود در هندسه

منظور از اطلاعات رودخانه یوان واقع در کشور چین در ایستگاه-های یوانلینگ و وانگجیاهه استفاده شد. تحقیقاتی که تاکنون در این زمینه صورت گرفته است به شرح ذیل می‌باشد:

Price (1982) نوع دیگری از مدل غیرخطی موج پخشیدگی را برای پیش‌بینی سیلاب در رودخانه wye انگلستان به کار برد. در این روش، پس از بهینه‌سازی پارامترهای مدل، تابع هدف و خطای جذر میانگین مربعات سری زمانی دبی پیش‌بینی شده قرار داده شده است.

Singh et al (1997) با حل معادله موج پخشیدگی با استفاده از روش سلول مخلوط، توانستند معادله موج پخشیدگی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه اول تبدیل کنند. Wang et al (2003b) یک مقایسه بین روش رانگ کوتای مرتبه چهار و طرح لامبدا با روش سلول مخلوط انجام دادند و نتایج آن‌ها نشان داد که روش سلول مخلوط دقیق‌تر از دو روش دیگر روند سیل را برآورد می‌کند. Wang et al (2005) با حل معادلات سنت و نانت به روش موج پخشیدگی فرم چهار نقطه‌ای نشان دادند که با استفاده از عدد فرود و داشتن مشخصات هیدرولیکی مقطع مورد مطالعه بدون نیاز به کالیبره کردن مقادیر طول مشخصه و ضریب موج سینماتیک، هیدروگراف خروجی با دقت بالایی پیش‌بینی می‌شود. Ningning et al (2012) با مطالعه روندیابی سیل به روش موج پخشیدگی با استفاده از روش Lattice Boltzmann دریافتند که نتایج روندیابی حاصل از روش شبکه بولتزمن یک روش بسیار دقیق از نظر کارایی و دقت برای حل معادله موج پخشیدگی است و همبستگی زیادی بین داده‌های مشاهداتی و پیش‌بینی شده روش عددی وجود دارد.

Koussis et al (2012) با مطالعه روندیابی معکوس سیلاب با استفاده از روندیابی ذخیره‌ای معکوس ماسکینگ‌ها مشاهده کردند که هیدروگراف‌های ورودی با دقت خوب بازیابی می‌شوند. آن‌ها نتایج روندیابی معکوس ماسکینگ‌ها را با نتایج روش حل معکوس معادلات سنت و نانت در حرکت موج سیل مقایسه کرده و مشاهده نمودند که نتایج دقت بالایی دارد و هیدروگراف جریان ورودی به سادگی از روش معکوس ماسکینگ‌ها به دست می‌آید. Yang et al. (2016) با بررسی عملکرد روش موج پخشیدگی بر انتشار موج سیل در رودخانه Piney در آمریکا مشاهده کردند که این مدل در مطالعه موردی آن‌ها نتایج خوبی داشته و می‌تواند هیدروگراف را با دقت بالایی پیش‌بینی نماید.

### مواد و روش‌ها

جریان غیردائمی در کانال‌های باز توسط معادلات سنت و نانت، روابط (۱) و (۲) بیان می‌شود. برای بیشتر جریان‌ها ترم‌های

رودخانه، ضریب زبری و شیب طولی، می‌توان بیان کرد که علت اصلی استفاده نکردن از روندیابی هیدرولیکی با روش موج دینامیک، کاهش هزینه‌ها و رهایی از عدم قطعیت موجود در برداشت هندسه و توپوگرافی مقطع رودخانه و تخمین زبری می‌باشد. به همین دلیل برخی محققان با بررسی عبارت‌های اینرسی موجود در معادله مومنتم که اثر محدودی در محاسبه جریان سیلاب‌ها دارند، این عبارت‌ها را حذف کرده و معادله مدل موج پخشیدگی را بر حسب دبی استخراج کرده‌اند. اینکه بیشتر محققان مدل موج پخشیدگی را بر اساس دبی استخراج کرده‌اند بیانگر این است که به مشکلات به‌کارگیری معادله بر حسب عمق آگاه بوده‌اند. در میان روش‌های روندیابی هیدرولیکی، روش موج پخشیدگی مزایایی دارد که در ذیل به آنها اشاره شده است (Cappelaera, 1997):

۱- حذف یکی از دو متغیر دبی (Q) یا تراز (Z) از معادلات.  
 ۲- تجمیع مشخصات اصلی کانال که توصیف‌کننده هندسه کانال و زبری در طول رودخانه می‌باشند در پارامترهایی کلی‌تر به نام ضرایب تندی موج (Celerity) و پخشیدگی (Diffusivity).  
 روش موج پخشیدگی زمانی که برای روندیابی هیدرولیکی سیلاب، اطلاعات در دسترس محدود باشد بسیار مناسب است. در این موارد پارامترهای موج در مدل روندیابی پخشیدگی برای محققان ملموس‌تر از زمانی است که اطلاعاتی از شرایط واقعی و پیچیده جریان را در مدل کامل دینامیکی توصیف کنند. از آنجا که در معادلات مدل موج پخشیدگی، جملات هندسه کانال حضور ندارند این روش را می‌توان برای مقاطع نامنظم نیز به کار برد. حل معادلات سنت و نانت در حالتی که از جملات شتاب صرف-نظر شده و به فرم معادله پخشیدگی تبدیل شود، بدون در نظر گرفتن دبی جانبی در سال ۱۹۵۱ توسط هیامی ارائه شد که در نتیجه ترکیب معادلات به حالت ساده‌شده موج پخشیدگی بدون جریان جانبی تبدیل می‌شود. در سال‌های اخیر با توجه به نتایج قابل قبول این روش در روندیابی سیل و همچنین در نظر گرفتن مسائل ناشی از اثر پس‌زنی آب (Backwater Effect)، استفاده از مدل موج پخشیدگی در روندیابی جریان‌های ناپایدار کاربردهای روز افزون پیدا کرده است (Wang et al., 2003a).

برای حل معادله (۱) روش حل تحلیلی وجود ندارد و می‌بایست از روش‌های عددی مانند روش خطوط مشخصه، روش‌های تفاضل محدود و روش‌های حجم محدود برای حل آن استفاده کرد. در این تحقیق به بررسی روندیابی معکوس سیلاب با روش‌های عددی سلول مخلوط و کرانک نیکلسون به فرم معکوس پرداخته شد تا با بررسی میزان صحت نتایج و داده‌های مورد نیاز برای هر کدام از روش‌ها، مناسب‌ترین روش تعیین شود. بدین

معادله (۱۱) یک معادله غیرخطی است که برای مدل سازی موج پخشیدگی در روندیابی سیل استفاده می شود که در این تحقیق با استفاده از دو روش عددی ضمنی و صریح برای حل این معادلات و در نهایت یافتن رابطه ای بین دبی جریان در نقطه ی هدف و مشخصات جریان استفاده شد. همچنین پس از آن از الگوریتم دو روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون برای پیش بینی استفاده شد.

#### داده های مورد مطالعه

برای بررسی و مقایسه روش های روندیابی سیلاب به روش موج پخشیدگی با روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون از داده های سال های سیلابی رودخانه یوان که مربوط به دو ایستگاه به نام های یوانگلینگ و وانگجیاهه که در چین قرار دارند استفاده شد. این داده ها مربوط به سیلاب هایی می باشد که در سال های ۱۹۶۸ تا ۲۰۰۶ در حد فاصل بین دو ایستگاه یوانگلینگ-وانگجیاهه به وقوع پیوست. دلیل استفاده از این روش های عددی، اولاً سرعت محاسبات بالا و ثانیاً مزیت مهم و اساسی آن ها یعنی نیاز نداشتن به اطلاعات توپوگرافی و هیدرولیکی رودخانه می باشد. ایستگاه یوانگلینگ در نزدیکی شهرستان یوانگلینگ با زون R۴۹ و طول جغرافیایی ۴۳/۴۳۰۴۴۰ و عرض جغرافیایی ۰۶/۳۰۷۰۳۱۴۷ و ایستگاه وانگجیاهه در پایین دست این ایستگاه با طول جغرافیایی ۷۴/۴۲۸۷۴۰ و عرض جغرافیایی ۰۹/۳۰۸۸۳۴۰ قرار دارد. از مشخصات حد فاصل دو ایستگاه مورد مطالعه می توان طول رودخانه را که ۱۱۲ کیلومتر، عرض کف ۳۴۳ متر، شیب کف ۰/۰۰۴ و شماره رده رودخانه اصلی ۵ با نسبت انشعاب ۴ را بیان کرد. میانگین بارش سالانه ی محدوده مورد مطالعه ۱۵۳۸ میلی-متر مربوط به آمار سی ساله می باشد. تصویر هوایی ایستگاه یوانگلینگ-وانگجیاهه در شکل (۱) نشان داده شده است.

اینرسی (محل و جابه جایی) خیلی کمتر از شیب انرژی و گرادیان فشار می باشند (Mahmoodian Shoostari, 2010). علاوه بر این مشاهدات تجربی و میدانی نشان می دهد که در بسیاری از حالات روندیابی، می توان از شتاب های محلی و جابه جایی صرف نظر کرد. بنابراین معادله (۲) را می توان این گونه نوشت:

$$S_f = S_0 - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (\text{رابطه ۳})$$

از طرفی طبق قانون شزی نتیجه می شود (Hoseini and Abrishami, 2011):

$$S_f = \frac{v^2}{C^2 R} \quad (\text{رابطه ۴})$$

R شعاع هیدرولیکی و C ضریب شزی است و با جایگذاری معادله (۳) در (۴) و با توجه به اینکه  $Q = AV$  است. نتیجه می شود:

$$V = CR^{0.5} \left( S - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^{0.5} \quad (\text{رابطه ۵})$$

$$Q = ACR^{0.5} \left( S - \frac{\partial y}{\partial x} \right)^{0.5} \quad (\text{رابطه ۶})$$

با فرض آنکه مجرای انتقال آب مستطیلی و عریض است، نتیجه می شود:  $A = By$  و  $R \approx y$  و با جایگذاری آن ها در معادله (۶) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = S_0 - \frac{Q^2}{C^2 B^2 y^3} \quad (\text{رابطه ۷})$$

اگر ضریب شزی و شیب بستر ثابت باشد، از معادله (۷) نسبت به t مشتق گرفته و سپس به صورت زیر می شود:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{3Q^2}{B^2 C^2 y^4} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{2Q}{B^2 C^2 y^3} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{رابطه ۸})$$

از طرفی:

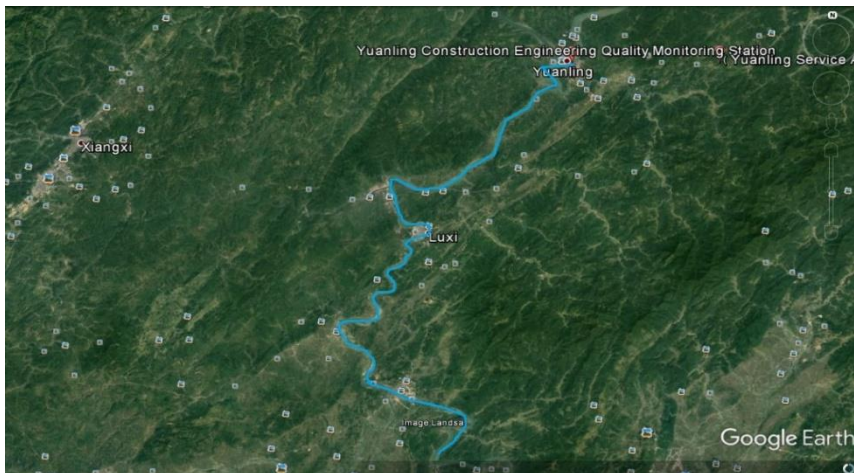
$$\frac{\partial y}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{B \partial x} \quad (\text{رابطه ۹})$$

با مشتق گیری از معادله (۹) نسبت به x و جای گذاری آن در معادله (۸) نتیجه می شود:

$$- \frac{1}{B} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{3Q^2}{B^2 C^2 y^4} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{2Q}{B^2 C^2 y^3} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{رابطه ۱۰})$$

و با جای گذاری معادله (۹) در معادله (۱۰) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{BC^2 y^3}{2Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{3Q \partial Q}{2By \partial x} \quad (\text{رابطه ۱۱})$$



شکل ۱- تصویر هوایی ایستگاه یوانگلینگ-وانگجیاهه واقع در کشور چین

می‌شود:

(رابطه ۲۱)

$$\frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} = \frac{C_k}{\Delta x} (Q_{i-1}^k - Q_i^k) + \left( \frac{\Delta t}{2} C_k^2 - \frac{\Delta x}{2} C_k + \frac{3C_k^2 y^2}{4C_k} \right) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

برای صرف نظر کردن از مشتقات مرتبه دوم در معادله (۲۱)

ضریب آن را برابر صفر قرار داده و مقدار  $\Delta x$  از معادله (۲۲) به دست می‌آید:

$$\Delta x = \Delta t C_k + \frac{3C_k^2 y^2}{2C_k^2} \quad (\text{رابطه ۲۲})$$

و لذا شرط فوق معادله (۲۱) به صورت ذیل در خواهد آمد:

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \frac{\Delta t C_k}{\Delta x} (Q_{i-1}^k - Q_i^k) \quad (\text{رابطه ۲۳})$$

معادله (۲۳) برای محاسبه دبی به روش مستقیم در روش

سلول مخلوط است، که برای روندیابی معکوس شکل آن به صورت معادله (۲۴) خواهد شد:

$$Q_{i-1}^k = \frac{\Delta x (Q_i^{k+1} - Q_i^k)}{\Delta t C_k} + Q_i^k \quad (\text{رابطه ۲۴})$$

این معادله برای محاسبه دبی به روش معکوس در روش

سلول مخلوط است که برای محاسبه و تخمین هیدروگراف بالادست مورد استفاده قرار می‌گیرد.

#### الگوریتم محاسبه روش سلول مخلوط به روش معکوس

اندیس  $i$  مبین مکان (ایستگاه بالادست یا پایین دست که عدد صفر بیانگر ایستگاه بالادست و عدد یک بیانگر ایستگاه پایین دست) است و اندیس  $k$  مبین زمان در هر دو ایستگاه می‌باشد.

(۱) یک مقدار فرضی برای  $Q_0^1$  در نظر گرفته می‌شود.

(۲) مقدار ضریب سینماتیک را با معلوم بودن پارامترها و دبی در هر گام با استفاده از فرمول  $C_k = aQ^b$  محاسبه می‌شود.

(۳) طول مشخصه کانال با استفاده از فرمول برای داده‌های

سیلابی رودخانه یوان با استفاده از شیب بستر و عرض کانال کالیبره و مقدار آن از رابطه  $\zeta = \frac{7.2668Q}{C_k}$  محاسبه می‌شود.

(۴) مقدار  $\Delta x$  از فرمول  $\Delta x = \Delta t \times C_k + \zeta$  محاسبه می‌شود.

شود.

(۵) دبی در بالادست با استفاده از رابطه (۲۴) محاسبه می‌شود.

شود.

(۶) دبی به دست آمده در مرحله شش با دبی متناظر در

پایین دست مقایسه می‌شود. اگر دبی محاسبه شده بیشتر از دبی

$Q_1^1$  باشد، فرض اولیه درست و باید به مرحله هشت رفت و بقیه

نقاط محاسبه ولی اگر این عدد کوچکتر از فرض اولیه باشد، فرض دیگری انتخاب می‌شود.

#### روندیابی مستقیم و معکوس سیل به روش سلول مخلوط (Mixing Cell)

هدف از حل معادله (۱۱) تعیین عمق آب و دبی برای تمامی نقاط کانال در هر گام زمانی دلخواه است. برای حل این معادله روش سلول مخلوط پیشنهاد می‌شود که ترم‌های پخشیدگی با انتخاب  $\Delta x$  مناسب وقتی که  $\Delta t$  در اختیار باشد قابل صرف نظر کردن است. (Oodi, 2016).

با استفاده از بسط سری تیلور و صرف نظر کردن از مرتبه

سوم به بالا در این بسط برای گام زمانی و مکانی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \quad (\text{رابطه ۱۲})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_i^k - Q_{i-1}^k}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (\text{رابطه ۱۳})$$

ترم دوم در سمت راست معادله (۱۲) با استفاده از مدل

موج سینماتیک را نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -C_k \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{رابطه ۱۴})$$

که با استفاده از رابطه شزی سرعت موج سینماتیک برابر

است با  $C_k = \frac{3}{2} V = \frac{3Q}{2By}$  و ترم آخر از معادله (۱۲) با استفاده از

مدل موج سینماتیک به شرح ذیل در خواهد آمد:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( -C_k \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = -\frac{\partial C_k}{\partial t} \frac{\partial Q}{\partial x} + C_k \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

از طرفی می‌توان نوشت:  $C_k = aQ^b$  در این معادله

هر دو پارامترهایی می‌باشند که به مشخصات جریان وابسته‌اند.

اگر از این معادله یک بار نسبت به  $x$  و بار دیگر نسبت به  $t$  مشتق گرفته شود نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial C_k}{\partial t} = abQ^{b-1} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{رابطه ۱۶})$$

$$\frac{\partial C_k}{\partial x} = abQ^{b-1} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{رابطه ۱۷})$$

با ترکیب معادلات (۱۶) و (۱۷) و جایگذاری در معادله

(۱۵) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 2C_k \frac{\partial C_k}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (\text{رابطه ۱۸})$$

برای سیل طبیعی سرعت موج سینماتیک بین دو پروفیل

بسیار کوچکتر از توان دوم آن است؛ بدین ترتیب ترم دوم جمله

راست رابطه (۱۸) بزرگتر از ترم اول سمت راست این معادله است

و قابل صرف نظر کردن می‌باشد، بنابراین از معادله (۱۸) نتیجه

می‌شود:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (\text{رابطه ۱۹})$$

بدین ترتیب معادله (۱۲) با جایگذاری معادله (۱۹) در آن

به شکل زیر تغییر می‌یابد:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{k+1} - Q_i^k}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} C_k^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (\text{رابطه ۲۰})$$

با جای گذاری معادله (۲۰) و (۱۳) در معادله (۱۱) نتیجه

پایین دست مقایسه می‌شود. اگر دبی محاسبه شده بیشتر از دبی  $Q_1^1$  باشد فرض اولیه درست و به مرحله هشت برو و بقیه نقاط محاسبه ولی اگر این عدد کوچکتر از فرض اولیه باشد فرض دیگری انتخاب می‌شود.

تذکر: برای انتخاب فرض درست باید قدر مطلق تفاضل دبی محاسبه شده در مرحله ۶ با دبی  $Q_1^1$  کوچکتر از  $\varepsilon$  باشد (۸) برای  $k=1,2,3,4,\dots$  مراحل ۱ تا ۷ تکرار شده تا هیدروگراف مربوط به  $i=0$  کامل شود.

### نتایج و بحث

هیدروگراف‌های محاسباتی روندیابی سیلاب به روش‌های مستقیم و معکوس

هیدروگراف‌های مشاهده شده از هر پنج سیلاب ثبت شده در محل مقاطع ورودی و خروجی به همراه هیدروگراف‌های محاسباتی از هر دو روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون به فرم معکوس در شکل‌های (۲) و (۳) نمایش داده شده است.

در این شکل‌ها  $Q_{in\ obs}$  دبی ورودی مشاهداتی بالادست،  $Q_{out\ obs}$  دبی خروجی مشاهداتی پایین دست،  $Q_{out\ cal}$  دبی محاسباتی برای خروجی پایین دست و  $Q_{in\ cal}$  دبی محاسباتی برای ورودی بالادست رودخانه می‌باشد.

#### شاخص‌های آماری مورد استفاده

شاخص نش-ساتکلیف یا به اختصار NS: یکی از شاخص‌های مورد نیاز به منظور ارزیابی نتایج حاصل از محاسبات با داده‌های مشاهداتی می‌باشد که در رابطه (۲۸) بیان شده است. این ضریب اختلاف نسبی مقادیر مشاهداتی و محاسباتی را نشان می‌دهد و شاخص مناسبی برای مقایسه سری‌های زمانی می‌باشد. مقدار این شاخص از منفی بی‌نهایت تا یک متغیر است. عدد یک بیانگر انطباق کامل بین نتایج مدل و داده‌های مشاهداتی می‌باشد و هر چه عدد کوچکتر شود، اختلاف بیشتر بین نتایج را نشان می‌دهد. (رابطه ۲۸)

$$NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{cal,i} - Q_{obs,i})^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{obs,i} - Q_{obs\ ave,i})^2}$$

ضریب مجموع باقیمانده (CRM): این شاخص اندازه گرایش مدل به سمت تخمین اندازه‌گیری بیش از حد یا کمتر از حد است. CRM مثبت نشانگر گرایش به سمت تخمین بیش از حد می‌باشد.

$$CRM = \frac{\sum_{i=1}^n Q_{cal,i} - \sum_{i=1}^n Q_{obs,i}}{\sum_{i=1}^n Q_{cal,i}} \quad (\text{رابطه ۲۹})$$

ضریب تبیین ( $R^2$ ): نشان‌دهنده میزان همبستگی بین مقادیر محاسباتی و مشاهداتی است. ضریب تبیین شاخصی است که بیانگر انحراف نقاط با طول دبی مشاهداتی و عرض دبی محاسباتی از نیمساز ربع اول می‌باشد. نزدیک بودن این عدد به

تذکر: برای انتخاب فرض درست باید قدر مطلق تفاضل دبی محاسبه شده در مرحله پنج با دبی  $Q_1^1$  کوچکتر از  $\varepsilon$  باشد. (۷) برای  $k=1,2,3,4,\dots$  مراحل یک تا پنج تکرار شده تا هیدروگراف مربوط به  $i=0$  کامل شود.

روندیابی مستقیم و معکوس سیل به روش کرانک نیکلسون (Crank Nicolson)

فرم استاندارد روش کرانک نیکلسون نیز به روش صریح است. در این روش تفاضلات با استفاده از سری بسط تیلور که در سال ۱۹۸۲ توسط نویه مطرح شد، استفاده شده و دبی پیش‌بینی شده هر گام در این روش با استفاده از روش چهار نقطه‌ای محاسبه شد (Noye, 1982).

(رابطه ۲۵)

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \frac{\Delta t C_k}{\Delta x} \left( \frac{Q_{i-1}^{k+1} + Q_{i-1}^k}{2} - \frac{Q_i^{k+1} + Q_i^k}{2} \right)$$

با مرتب کردن معادله (۲۵) داریم:

(رابطه ۲۶)

$$Q_i^{k+1} = \left( \frac{2 - C_r}{2 + C_r} \right) Q_i^k + \left( \frac{C_r}{2 + C_r} \right) (Q_{i-1}^{k+1} + Q_{i-1}^k)$$

که در آن  $C_r$  عدد کورانت است و مقدار این عدد بصورت  $C_r = \frac{\Delta t \times C_k}{\Delta x}$  می‌باشد، عدد کورانت بیان‌کننده نسبت تندی موج در شبکه‌ی محاسباتی است.

با جابه‌جایی و تغییر در معادله (۲۶) مقدار دبی مجهول برای هیدروگراف رابطه (۲۷) به دست می‌آید: (رابطه ۲۷)

$$Q_{i-1}^{k+1} = Q_i^{k+1} \left( \frac{2 + C_r}{C_r} \right) - C_r (2 - C_r) Q_i^k - Q_{i-1}^k$$

در این روش از سه نقطه برای حدس نقطه چهارم که دبی هیدروگراف ورودی است، استفاده می‌شود.

#### الگوریتم محاسبه روش کرانک نیکلسون به روش معکوس

(۱) یک مقدار فرضی برای  $Q_0^1$  در نظر گرفته می‌شود.  
 (۲) مقدار ضریب سینماتیک را با معلوم بودن پارامترها و دبی در هر گام با استفاده از فرمول  $C_k = aQ^b$  محاسبه می‌شود.  
 (۳) طول مشخصه کانال با استفاده از فرمول برای داده‌های سیلابی رودخانه یوان با استفاده از شیب بستر و عرض کانال کالیبره و مقدار آن را از رابطه  $\zeta = \frac{7.2668Q}{C_k}$  محاسبه می‌شود.  
 (۴) مقدار  $\Delta x$  از فرمول  $\Delta x = \Delta t \times C_k + \zeta$  محاسبه می‌شود.

(۵) عدد کورانت از رابطه  $C_r = \frac{\Delta t \times C_k}{\Delta x}$  محاسبه می‌شود.

(۶) دبی پیش‌بینی شده در بالادست با استفاده از فرمول ۲۶ محاسبه می‌شود.

(۷) دبی به دست آمده در مرحله شش با دبی متناظر در

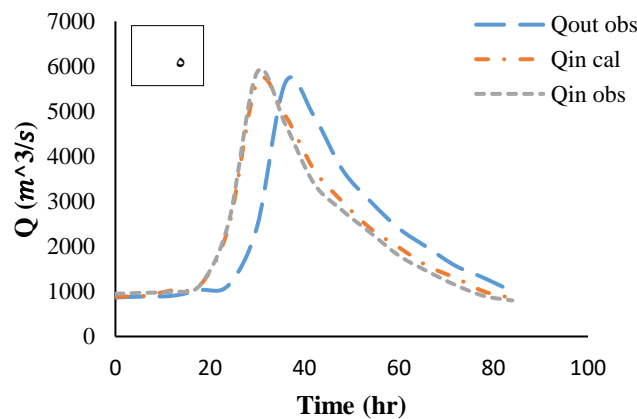
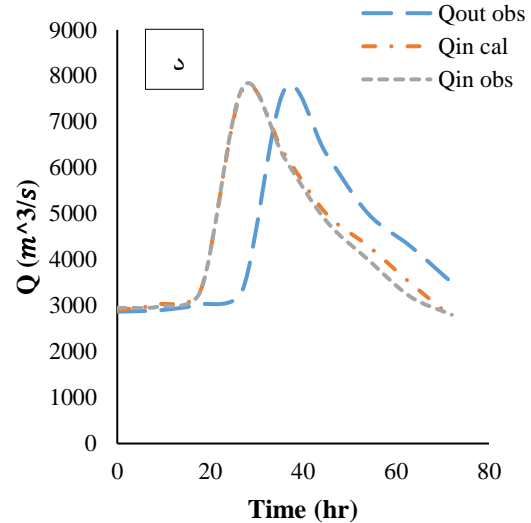
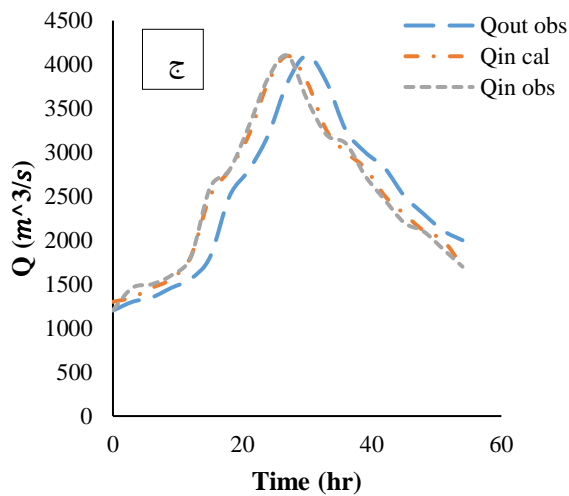
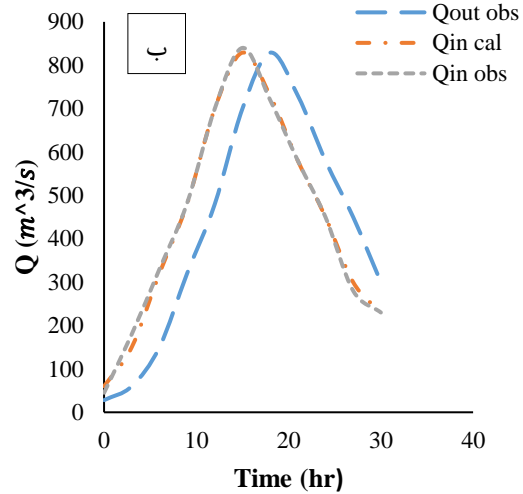
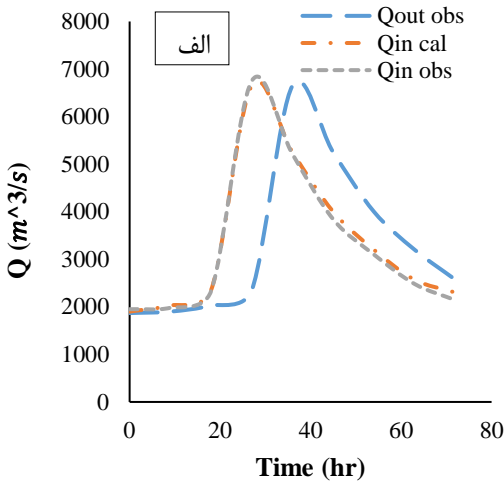
$$d = 1 - \left( \frac{\sum_{i=1}^n (Q_{cal,i} - Q_{obs,i})^2}{\sum_{i=1}^n (|Q_{obs,i} - Q_{obs,ave}| + |Q_{cal,i} - Q_{cal,ave}|)^2} \right) \quad \text{(رابطه ۳۱)}$$

در رابطه‌های ذکر شده،  $Q_{obs}$  مقادیر تغییرات دبی نسبت به فاصله مشاهداتی و  $Q_{cal}$  مقادیر تغییرات دبی نسبت به فاصله محاسباتی و  $n$  تعداد مشاهدات می‌باشد.

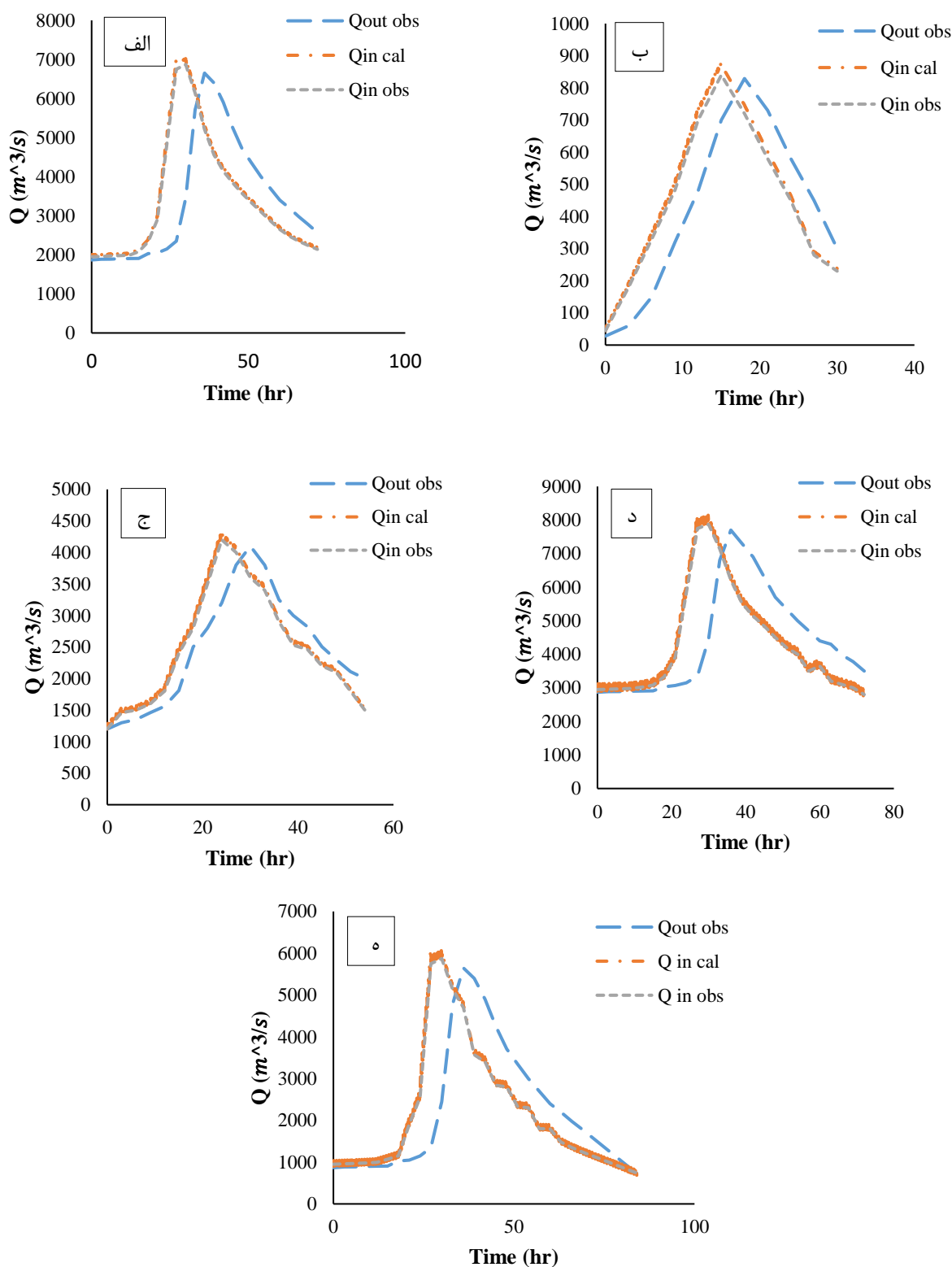
یک نشانگر نزدیکی هرچه بیشتر مقادیر محاسباتی از نیمساز ربع اول می‌باشد.

$$R^2 = \frac{[\sum_{i=1}^n (Q_{obs,i} - Q_{obs,ave})(Q_{cal,i} - Q_{cal,ave})]^2}{\sum_{i=1}^n (Q_{obs,i} - Q_{obs,ave})^2 \sum_{i=1}^n (Q_{cal,i} - Q_{cal,ave})^2} \quad \text{(رابطه ۳۰)}$$

شاخص ویلموت یا شاخص تطبیق (d): بیانگر درجه دقت مدل در شبیه‌سازی می‌باشد و در شرایط آرمانی  $d=1$  است.



شکل ۲- هیدروگراف خروجی پیش‌بینی شده در روش معکوس سلول مخلوط در ایستگاه یوانلینگ-وانگجیاهه برای (الف): دبی سیلابی سال ۱۹۸۶ (ب): دبی سیلابی سال ۱۹۹۹ (ج): دبی سیلابی سال ۲۰۰۲ (د): دبی سیلابی سال ۲۰۰۴ (ه): دبی سیلابی سال ۲۰۰۶



شکل ۳- هیدروگراف خروجی پیش‌بینی شده در روش معکوس کرانک نیکلسون در ایستگاه یوانلینگ-وانگجیاهه برای (الف): دبی سیلابی سال ۱۹۸۶ (ب): دبی سیلابی سال ۱۹۹۹ (ج): دبی سیلابی سال ۲۰۰۲ (د): دبی سیلابی سال ۲۰۰۴ (ه): دبی سیلابی سال ۲۰۰۶

هیدروگراف‌های خروجی حاصله از روش‌ها ملاحظه می‌شود که در روندیابی سیلاب به فرم مستقیم، دقت هر دو روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون بالا می‌باشد و همچنین هیدروگراف‌های ورودی استخراجی روندیابی به فرم معکوس، نشان‌دهنده

برای تعیین دقت دو روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون در برآورد هیدروگراف سیل برای فرم مستقیم و معکوس از شاخص‌های ضریب همبستگی، شاخص نش-ساتکلیف، ضریب مجموع باقیمانده و شاخص ویلموت استفاده شد. با توجه به



پیش‌بینی‌شده پایین‌دست با مقادیر واقعی در همان ایستگاه نزدیک‌تر می‌شود و در روش معکوس، سلول مخلوط بدون نیاز به فرض اولیه و تنها با داشتن مقادیر دبی هیدروگراف پایین‌دست، مقدار هیدروگراف بالادست با دقت قابل قبولی پیش‌بینی می‌شود. در روش روندیابی معکوس کرانک نیکلسون با انجام تحلیل حساسیت روی مقادیر دبی شرط اولیه و انتخاب بهترین حالت برای دبی شرط اولیه، با استفاده از درون‌یابی بین گام‌های زمانی در دو روش معکوس سلول مخلوط و کرانک نیکلسون صورت گرفت. در نهایت هیدروگراف ورودی محاسباتی ناشی از این روش دارای انطباق خوبی با مقادیر واقعی همین ایستگاه می‌باشد. همچنین در جدول (۱) مقادیر شاخص‌های آماری ذکر شده برای هر کدام از روش‌های مستقیم و معکوس مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه کلیه شاخص‌های آماری به‌دست‌آمده در رنج مطلوبی قرار دارند، این حاکی از کارایی خوب الگوریتم روش روندیابی معکوس سیلاب برای تخمین هیدروگراف ورودی و بالعکس می‌باشد.

تعداد نقاط پیش‌بینی بیشتری در روش کرانک نیکلسون و دقت بالای این روش نسبت به روش سلول مخلوط است.

در بررسی نتایج حاصل از پارامتر  $R^2$  برای هر دو روش مورد استفاده ملاحظه می‌شود که روش کرانک نیکلسون در تخمین شکل هیدروگراف ورودی در فرم معکوس و تخمین شکل هیدروگراف خروجی در فرم مستقیم نسبت به روش سلول مخلوط دقیق‌تر می‌باشد. مقدار بیشینه ضریب همبستگی در روندیابی به فرم مستقیم کرانک نیکلسون در سیلاب سال ۲۰۰۶ به مقدار ۰/۹۹۸۶ و در روندیابی به فرم معکوس بیشترین مقدار مربوط به سیلاب سال ۱۹۹۹ به مقدار ۰/۹۹۹۶ می‌باشد. همچنین مقادیر شاخص‌های CRM، NS و d نیز در روش کرانک نیکلسون دارای دقت بهتری از روش سلول مخلوط می‌باشند.

### ارزیابی نتایج

در روندیابی سیلاب به فرم مستقیم در محاسبات مشاهده شد که با لحاظ کردن دبی شرط اولیه مناسب در هر دو روش، هیدروگراف

جدول ۱- مقادیر شاخص‌های آماری برای روش‌های معکوس کرانک نیکلسون و سلول مخلوط در رودخانه یوان

شماره	سال سیلابی	CRM		NS		d		$R^2$
		روش سلول مخلوط	روش کرانک نیکلسون	روش سلول مخلوط	روش کرانک نیکلسون	روش سلول مخلوط	روش کرانک نیکلسون	
۱	۱۹۸۶	-۰/۰۲۰۶۶	-۰/۰۲۰۳۶	۰/۹۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹	۱	۰/۹۹۷۶	۰/۹۹۹۳
۲	۱۹۹۹	-۰/۰۱۸۶۳	-۰/۰۳۹۷۸	۰/۹۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹	۱	۰/۹۹۷۱	۰/۹۹۹۵
۳	۲۰۰۲	-۰/۰۰۳۵۹	-۰/۰۱۹۸۹	۱	۱	۱	۰/۹۹۰۷	۰/۹۹۸۲
۴	۲۰۰۴	-۰/۰۲۱۹۷	-۰/۰۲۰۰۳	۰/۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۸	۱	۰/۹۹۳۴	۰/۹۹۴۵
۵	۲۰۰۶	-۰/۰۳۷۹۱	-۰/۰۱۹۶۸۸	۰/۹۹۹۹۷	۰/۹۹۹۹۷	۱	۰/۹۹۱۷	۰/۹۹۷۱

با توجه به آنکه مقادیر شاخص‌های آماری در هر دو روش نزدیک به هم می‌باشد، برای انتخاب روش برتر از روش متوسط-گیری این شاخص‌ها استفاده شد که نتایج حاصله در جدول (۲) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، هر دو روش دقت خوبی را ایجاد کرده‌اند اما روش کرانک نیکلسون را می‌توان به عنوان روش برتر در حل عددی معکوس موج پخشیدگی معرفی کرد. حداکثر خطای بیشینه دبی مشاهداتی و محاسباتی در روش کرانک نیکلسون و سلول مخلوط به ترتیب ۰/۲۲ و ۰/۵۹ درصد بود. بر اساس نتایج به‌دست آمده در پیش‌بینی دبی بیشینه و هیدروگراف ورودی مشاهده شد که روش کرانک نیکلسون نسبت به روش سلول مخلوط دقت بالاتری دارد. همچنین پارامترهای مربوط به پنج واقعه سیلاب نشانگر دقت و کارایی بیشتر روش کرانک نیکلسون به فرم معکوس در روند سیل رودخانه یوان بود.

در بررسی نتایج مربوط به شاخص‌های آماری مقدار پارامتر CRM در روندیابی به فرم مستقیم، به سمت تخمین بیش از مقدار واقعی هیدروگراف خروجی در هر دو روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون بوده و در روندیابی به فرم معکوس این تخمین کمتر از مقدار واقعی در هیدروگراف بالادست در هر دو روش مذکور حاصل شد. همچنین اختلاف نسبی بین مقادیر مشاهداتی و محاسباتی و درجه دقت مدل در شبیه‌سازی در روندیابی سیلاب به فرم معکوس روش کرانک نیکلسون برای هر پنج سال آماری در بهینه‌ترین حالت و دقیق‌تر از روش سلول مخلوط بوده و در روندیابی به فرم مستقیم روش‌های کرانک نیکلسون و سلول مخلوط اختلاف نسبی بین مقادیر مشاهداتی و محاسباتی داشته و همچنین درجه دقت مدل در شبیه‌سازی تقریباً در هر دو روش مذکور با هم برابر بود.

### نتیجه‌گیری

در این پژوهش کارایی و دقت دو روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون در روندیابی معکوس در مطالعه موردی رودخانه یوان واقع در کشور چین بررسی شد. با توجه به نتایج محاسبه شاخص - های آماری مشاهده شد که هر دو روش نتایج خوبی را در برآورد هیدروگراف بالادست دارند. با توجه به نزدیکی میزان و نوع اطلاعات و داده‌های مورد نیاز هر دو روش مورد استفاده در این

تحقیق و افزایش کارایی روش کرانک نیکلسون در روندیابی به فرم معکوس و مستقیم، این روش به عنوان روش برتر در بررسی روندیابی سیل به فرم معکوس در رودخانه یوان معرفی شد. در نهایت پیشنهاد می‌شود که روش‌های هیدرولیکی دیگر نظیر روش چهار نقطه‌ای FDF و روش زیگزاگی در روندیابی معکوس سیلاب استفاده شده و با دو روش سلول مخلوط و کرانک نیکلسون مورد مقایسه قرار گیرد.

جدول ۲- مقادیر متوسط شاخص‌های آماری برای روش‌های معکوس سلول مخلوط و کرانک نیکلسون

$\bar{R}^2$		$\bar{d}$		NS		$\overline{CRM}$	
Crank Nicolson method	Mixing cell method	Crank Nicolson method	Mixing cell method	Crank Nicolson method	Mixing cell method	Crank Nicolson method	Mixing cell method
۰/۹۹۷۷۲	۰/۹۹۴۱	۱	۰/۹۹۹۹۸۶	۱	۰/۹۹۹۹۸۶	-۰/۰۲۳۹۴۹۶	-۰/۰۲۰۵۵۲

### REFERENCES

- Hoseini, M., and Abrishami, J., (2011). *Hydraulics of open channel*. Imam Reza University Press, Mashhad. (In Persian).
- Koussis, A. D., Mazi, K., Lykoudis, S., and Argirion, A. A., (2012). Reverse flood routing with the inverted Muskingum storage routing scheme. *Journal of Natural Hazards on earth system science*. 12. pp. 217-227.
- Mahmoodian Shooshtari, M., (2010). *Principles of flow in open channels*. Shahid Chamran University Press, Ahvaz. (In Persian).
- Ningning, L., Feng, J., and Jun, Z., (2012). Flood routing based on diffusion wave equation using Lattice Boltzman method. *Journal of procedia engineering*. 28. pp. 190-195.
- Noye, J., (1982). Finite difference methods for partial differential equations, in Noye, J. (Ed.), *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*. North-Holland, New York. 647 pp.
- Oodi, SH. (2016). *Inverse flood routing using diffusion wave model*. M.S.C. dissertation, University of Bu Ali Sina, Hamadan.
- Price, R. K., (1982). A nonlinear theory of flood wave propagation. *Journal of Appl. Math. Modeling*. Vol.6.
- Singh, V.P., Wang, G-T. and Adrian, D.D., (1997). Flood routing based on diffusion wave Eq. using mixing cell method. *Hydrological Process*. 11, pp. 1881-1894.
- Wang, G.T., Chen, S. and Boll, J., (2003a). A semi-analytical solution of the Saint-Venant Eqs. for channel flood routing. *Water Resour.Res*, 39 (4), pp. 1076.
- Wang, G.T., Chen, S. and Boll, J., Singh, V.P., (2003b). Nonlinear convection-diffusion Eq. with mixing-cell method for channel flood routing. *Journal of Hydraulic engineering, ASCE*, 8 (5), pp. 259-265.
- Wang, G.T., Chunmei Y., Cairo, O. and Chen, S., (2005). Point FDF of Muskingum method based on the complete St -Venant equations.
- Yang, Y., Theodore, A. and Nowak, D. J., (2016). Application of advection-diffusion routing model to flood wave propagation, (A case study on big Piney River, Missouri USA). *Journal of Earth science*, 27 (1), pp. 009-014.