DOI:10.22059/ ijswr.2019.290536.668343

تحقیقات آب و خاک ایران، دوره ۵۱، شماره ۳، خرداد ۱۳۹۹ (ص ۵۷۴-۵۶۳)

# Application of Fractional Differential Equations in Analysis of Seepage Line in Coarse Porous Media

**NOOSHIN ESLAHI[1], ALIREZA VATANKHAH[2*], MOHAMMAD SEDGHI-ASL[3]**

1.Department of Irrigation and Reclamation Engineering, Faculty of Agricultural Engineering and Technology, University College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

2. Soil Science Department, College of Agriculture, Yasouj University, Yasouj, Iran.

(Received: Oct. 13, 2019- Revised: Dec. 4, 2019- Accepted: Dec. 7, 2019)

## ABSTRACT

In this study, the fractional-order differential equations in range of (0,1) were used to model the water surface profile under Darcy's law condition in porous medium for a fully developed turbulent flow. The developed equation is solved analytically. The laboratory model used in this study consists of a coarse-grained porous medium with 6.4 m length, 0.8 m width and 1 m height, including rounded corner materials, which are tested for different flow rates and three longitudinal slopes of 0, 4, 20.3%. Then, parameters of model and porous media were calibrated based on laboratory data. In order to evaluate the proposed analytical solution, the obtained results from fractional-order differential model were compared with the laboratory data. The results showed a satisfactory agreement with experimental data of water surface profile (seepage line) in all three slopes. The maximum error of the proposed model is 3.5% compared to the experimental data. It can be concluded that the proposed method can provide better description of water surface profile analysis under non-Darcy flow conditions as compared to Darcy model in porous media.

**Keywords:** Fully developed turbulent flow, fractional-order differential model, free surface profile, Non-Darcian flow, analytical solution.

* Corresponding Author's Email: arvatan@ut.ac.ir

# کاربرد معادلات دیفرانسیل کسری در تحلیل خط نشت در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه

نوشین اصلاحی[1]، علیرضا وطن خواه[1*]، محمد صدقی اصل[2]

۱. گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری کشاورزی، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی دانشگاه تهران، کرج، ایران.

۲. گروه علوم خاک، دانشکده کشاورزی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۷/۲۱- تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۹/۱۳- تاریخ تصویب: ۱۳۹۸/۹/۱۶)

## چکیده:

در این تحقیق از معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری برای مدل‌سازی نیمرخ سطح آب درون محیط متخلخل در دامنه مرتبه‌ی کسری صفر تا یک برای جریان متلاطم کاملاً توسعه‌یافته استفاده گردید و معادله توسعه‌یافته تحت شرایط قانون دارسی، به روش تحلیلی حل گردید. مدل آزمایشگاهی شامل یک محیط متخلخل درشت‌دانه به طول ۶/۴ متر، عرض ۰/۸ متر و ارتفاع ۱ متر و شامل مصالح گردگوشه می‌باشد که آزمایش‌ها برای حالت‌های مختلف دبی جریان و سه شیب افقی، ۴ و ۲۰/۳ درصد انجام شد. پارامترهای مدل و محیط متخلخل بر مبنای داده‌های آزمایشگاهی واسنجی گردیدند. به‌منظور ارزیابی حل تحلیلی حاضر، نتایج با داده‌های آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج به‌دست‌آمده توافق رضایت‌بخشی با داده‌های تجربی نیمرخ سطح آب را در هر سه شیب موردنظر نشان داد. به‌طوری‌که حداکثر خطای مدل پیشنهادی نسبت به داده‌های تجربی ۳/۵ درصد است. طبق تحقیق حاضر، روش پیشنهادی می‌تواند برای تجزیه و تحلیل نیمرخ سطح آب در شرایط جریان‌های غیر دارسی توصیف بهتری نسبت به مدل دارسی در محیط‌های متخلخل ارائه کند.

**واژه‌های کلیدی:** جریان آشفته‌ی کاملاً توسعه‌یافته، معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری، نیمرخ سطح آب، جریان غیردارسی، حل تحلیلی.

## مقدمه

جریان آب در خاک و مسائل وابسته از دیرباز توسط دانشمندان علوم خاک، نفت، محیط‌زیست و هیدروژئولوژی مورد توجه بوده و کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی داشته است. استفاده از مصالح درشت‌دانه‌ی سنگریزه‌ای در سازه‌های آبی به دلیل خصوصیات ویژه آن‌ها روز به روز در حال افزایش است، به‌طوری‌که از این مصالح جهت فیلتراسیون، پوشش کانال‌ها، حوضچه‌های آرامش، زهکش‌های سنگریز[1]و سدهای پاره‌سنگی استفاده می‌شود. رفتار جریان در این محیط‌ها به دلیل بزرگی اندازه ذرات و منافذ و بروز سرعت‌های بالا و آشفتگی جریان بسیار پیچیده است. از این رو در محیط‌های درشت‌دانه مانند زهکش-های سنگریز که جریان از میان آن‌ها با سرعت بالا عبور می‌کند، نمی‌توان از قانون دارسی برای برآورد پارامترهای مختلف جریان استفاده کرد چرا که کاربرد قانون دارسی محدود به شرایط خاصی ازجمله ماندگار و غیرقابل تراکم بودن جریان و برقراری شرایط جریان آرام است که در صورت انحراف از آن‌ها دیگر معتبر نیست و اصطلاحاً شرایط از دارسی به غیردارسی تغییر می‌کند. در این صورت اصولاً از روابط دیگری که بیانگر یک ارتباط غیرخطی بین سرعت و گرادیان هیدرولیکی در این نوع محیط‌ها است و به روابط غیر دارسی معروف هستند، استفاده می‌شود. جریان آشفته‌ی کاملاً توسعه‌یافته نوع خاصی از جریان‌های غیردارسی است که ممکن است در شیب طولی ۰/۰۱ در صورتی که قطر متوسط محیط متخلخل بزرگتر از ۳۰/۳ میلی‌متر باشد (تخلخل ۰/۳۵) رخ دهد(Moutsopoulos, 2009).

ازجمله موارد کاربرد و اهمیت مطالعه و بررسی جریان سیال درون محیط متخلخل به جهت طراحی و مدیریت سازه‌های متخلخل، آبخوان‌ها، رودخانه و آبراهه‌ها، تعیین موقعیت نیمرخ سطح آب و تحلیل آن است. در دهه‌های اخیر تلاش‌های بسیاری به‌منظور توسعه توصیف ریاضی جریان‌های غیردارسی صورت گرفته است (Zhou and Yang, 2018). نتیجه‌ی این مطالعات ارائه روابطی است که از طریق آن بتوان هیدرولیک جریان در محیط‌های متخلخل را شبیه‌سازی نمود.

تجزیه و تحلیل جریان‌های سیال درون محیط متخلخل درشت‌دانه می‌تواند مبتنی بر کاربرد مبانی نظری مختلفی ازجمله استفاده از تئوری دوپوئی و جریان متغیر تدریجی باشد. برخی از محققان بحث کاربرد جریان متغیر تدریجی را مطرح و با استفاده

* نویسنده مسئول: arvatan@ut.ac.ir

۱. توده عظیمی از سنگدانه که هنگام حفاری معادن ایجاد می‌شود

از نتایج آزمایشگاهی به ارزیابی صحت این تئوری در موارد محدودی پرداخته‌اند. Wilkins (1955) اولین مطالعه جدی و مستند در مورد کاربرد جریان متغیر تدریجی به‌عنوان یک ابزار مدل‌سازی نیمرخ سطح آب در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه را انجام داد و سپس محققان دیگری از این روش در مطالعه‌ی جریان در محیط‌های متخلخل استفاده کردند( Parkin, 1963; Stephenson, 1979). در ادامه Bari and Hansen (2002) بیان کردند در شرایطی که هندسه کانال تغییر کند نظریه جریان متغیر تدریجی بهترین ابزار مدل‌سازی نیمرخ سطح آب درون مصالح سنگریز است که Bazargan and Shoaei (2006) با نقد پژوهش ایشان به قابل‌قبول نبودن نتایج روابط Wilkins و Stephenson اشاره کردند. Sarkhosh *et al.* (2017) به مدل‌سازی یک‌بعدی نیمرخ سطح آب درون سازه‌های سنگریز با روش گام استاندارد پرداختند و رابطه‌ای توانی بین سرعت و گرادیان هیدرولیکی استخراج نمودند.

از دیگر مبانی نظری قابل کاربرد، تئوری دوپوئی است که به‌طور گسترده در مسائل آب‌های زیرزمینی استفاده می‌گردد. نظریه جریان آزاد دوپوئی مبتنی بر دو فرض می‌باشد: (۱) به ازای تغییرات کم در شیب خط نشت، خطوط جریان را می‌توان افقی در نظر گرفت، به بیان دیگر بار هیدرولیکی مستقل از عمق است. (۲) شیب هیدرولیکی برابر با شیب سطح آزاد آب است و با عمق تغییر نمی‌کند یعنی هیچ‌گونه گرادیانی در جهت قائم وجود ندارد. اعتبار این فرض مستقیماً به مقدار زاویه شیب‌خط نشت ارتباط دارد. اگرچه ماهیت این دو فرض متناقض است، ولی حل بسیاری از مسائل آب زیرزمینی بر پایه فرض‌های دوپوئی، با حل آن‌ها به روش‌های دقیق‌تر به‌خوبی برابری می‌کند ( Harr, 1963; Reddi, 2003).

Sedghi-Asl and Ansari (2016) با ترکیب فرضیات دوپوئی- فرشهایمر توسعه‌یافته و رابطه غیرخطی افت فشار توانی به معادله دیفرانسیل جدیدی دست یافتند و یک راه‌حل تحلیلی برای محاسبه نیمرخ سطح آب از میان محیط متخلخل زبر توسعه دادند. ایشان در ادامه تحقیقات خود به تحلیل عمق نرمال در زهکش سنگی در حالت ماندگار پرداختند و یک راه‌حل کلی برای محاسبه نیمرخ سطح آب از میان زهکش‌های سنگی تحت فرضیات دوپوئی فرشهایمر ارائه نمودند.

همان‌گونه که اشاره گردید قانون دارسی در مواردی که رژیم جریان از آن پیروی نمی‌کند قادر به توصیف دقیق رفتار جریان نیست، پدیده‌ای که در سازه‌های هیدرولیکی متخلخل به دلیل درشت‌دانه بودن سنگ‌دانه‌ها و منافذ ایجاد می‌شود. لذا بازنگری در معادله نیمرخ سطح آب تحت شرایط قانون دارسی به‌منظور شبیه‌سازی بهتر پدیده غیردارسی امری ضروری است و تحقیق در این موضوع نیازمند ابزارها و روش‌های جدید برای ارائه معادلات دقیق‌تر نسبت به شرایط واقعی است. در سال‌های اخیر، تمرکز بسیاری روی مشتقات کسری و معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری در علوم مختلف ازجمله مهندسی آب وجود داشته است و بهبودهایی در معادلات انتشار جابجایی ( Martinez *et al.*, 2010)، انتشار آلودگی (Oldham and Spanier, 1974)، طراحی زهکش‌های زیرزمینی (Cooke *et al.*, 2001)، مدل‌های موج دیفیوژن و موج سینماتیک جریان کانال باز ( Kavvas and Ercan, 2014) حاصل شده است. با توجه به کاربرد معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری در بهینه کردن و بالا بردن دقت مدل‌های ریاضی ارائه‌شده در مسائل مهندسی، در این بخش به معرفی حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری و ویژگی‌های آن پرداخته می‌شود.

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری عنوانی است برای نظریه انتگرال‌ها و مشتق‌ها از هر مرتبه دلخواه که تعمیمی برای مشتق از مرتبه n و انتگرال n گانه است که معادلات مرتبه صحیح زیر مجموعه‌ای از آن محسوب می‌شوند. به عبارتی مشتقات مرتبه کسری، شکل کلی مشتقات مرتبه صحیح هستند که مرتبه مشتق‌گیری آن‌ها به‌جای یک عدد صحیح، هر عدد حقیقی مثبت می‌تواند باشد (Podlubny, 1998). بسیاری از نویسندگان روش‌های مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری خطی و غیرخطی ارائه کرده‌اند که اهمیت زیادی در زمینه‌های علمی و فناوری دارند. از آنجا که اکثر معادلات پیچیده‌ی دیفرانسیل کسری جواب‌های تحلیلی دقیق ندارند، برای حل آن‌ها، روش‌های تقریبی و عددی به‌طور گسترده استفاده می‌شود و در موارد وجود حل تحلیلی، روش تبدیلات لاپلاس بسیار کاربردی خواهد بود (Podlubny, 1998).

سیستم‌های مرتبه کسری ابزاری بسیار عالی و سودمند برای توصیف حافظه و ویژگی‌های ذاتی مواد مختلف به شمار می‌روند و در حال حاضر، تعداد کاربردهای آن به سرعت در حال رشد است. یکی از خواص بسیار مهم مشتقات مرتبه کسری این است که بر خلاف مشتقات مرتبه صحیح، این نوع مشتقات غیر موضعی هستند، این بدین مفهوم است که مشتق مرتبه کسری تابع در یک نقطه، نه فقط بستگی به خصوصیات تابع در آن نقطه دارد بلکه بستگی به خصوصیات تابع در تمام نقاط موجود در دامنه تابع دارد (Huang *et al.*, 2008). وجود چنین خاصیتی باعث شده است که مشتقات مرتبه کسری به‌عنوان روشی بسیار قوی برای بررسی پدیده‌هایی که خصوصیات آن‌ها وابسته به مکان و زمان است، شناخته شوند (Ding *et al.*, 2010). با کاربرد

مشتقات مرتبه کسری اثرات مقیاس بر خصوصیات محیط متخلخل حذف می‌شود. در این حالت خصوصیات محیط متخلخل مانند ضریب هدایت هیدرولیکی مستقل از مقیاس و دارای مقدار ثابتی خواهند بود (Benson *et al*., 2000; Wheatcraft and Meerschaert, 2008; Schumer *et al*., 2001).

مسئله نشت در محیط‌های سنگریز به دو دلیل مورد توجه است: الف- سطح نشت خروجی در پایین‌دست سازه‌های سنگریز و زهکش‌های معادن در یک دبی خاص مستغرق می‌گردد. چنانچه به ازای حداکثر دبی طراحی، تراز آب خروجی محاسبه شده کم باشد، قابلیت فرسایش سنگدانه‌ها در وجه پایین‌دست کاهش می‌یابد. و ب- سطح نشت مشاهده‌شده در پایین‌دست سازه‌های سنگریز یکی از شرایط مرزی مسئله نشت برای مدل‌سازی فشار منفذی است. آگاهی از موقعیت سطح نشت در وجه پایین‌دست سدهای خاکی، محاسبات فشار منفذی را تسهیل می‌نماید. همان‌طور که از پیشینه تحقیق مشخص است، در مسائل مهندسی آب تاکنون از ابزار محاسبات کسری برای پیش‌بینی خط نشت در محیط‌های متخلخل استفاده نشده است. بنابراین با توجه به اهمیت تعیین خط نشت در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه، هدف از تحقیق حاضر بهبود مدل‌سازی نیمرخ دارسی در جریان‌های غیردارسی عبوری از میان محیط متخلخل با استفاده از ابزار معادلات دیفرانسیل کسری است.

## مواد و روش‌ها

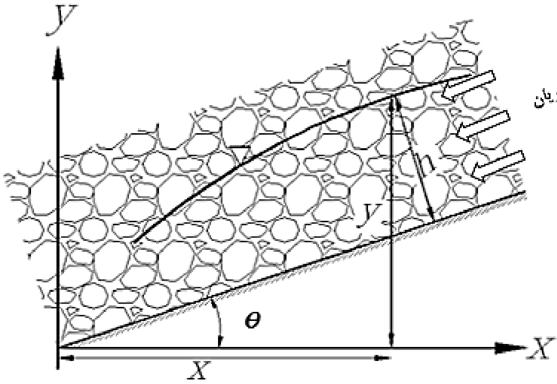
Pavlovsky (1956) با فرض ایجاد جریان ورقه‌ای در آب‌های زیرزمینی از ترکیب معادله پیوستگی و قانون دارسی استفاده کرد و به رابطه‌ی جدیدی به‌منظور پیش‌بینی سطح آب در محیط‌های متخلخل دست یافت.

$$q = Vh$$ (رابطه ۱)

$$h = (y - x\tan\theta)\cos\theta$$ (رابطه ۲)

$$V = -k\left(\frac{dy}{dx}\right)$$ (رابطه ۳)

در معادلات فوق، $q$ دبی در واحد عرض، $V$ سرعت جریان، $h$ عمق عمود بر کف کانال، $\theta$ زاویه‌ی کف کانال نسبت به افق و $k$ پارامتر تناسب است که تابع خصوصیات سیال و مصالح محیط بوده و به ضریب هدایت هیدرولیکی معروف است. علت وجود علامت منفی در معادله (۳) افت بار در طول مسیر است. شکل (۱) نیمرخ سطح آب در محیط متخلخل درشت‌دانه را به‌صورت شماتیک نشان می‌دهد.




**شکل ۱. نمایش شماتیک نیمرخ سطح آب درون محیط متخلخل درشت‌دانه**

با قرار دادن معادلات (۲) و (۳) در معادله (۱)، معادله (۴) حاصل می‌شود:

$$q = -k(y - x\tan\theta)\cos\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)$$ (رابطه ۴)

Sedghi-Asl *et al*. (2014b) رابطه (۴) را با در نظر گرفتن محیط‌های متخلخل با کف شیب‌دار به‌صورت رابطه (۵) بهبود بخشیدند.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-k(\cos\theta)^2}{q}\left(y - x\tan\theta\right)$$ (رابطه ۵)

به‌منظور حل، معادله (۵) ساده‌سازی و به شکل معادله (۶) بازنویسی می‌شود:

$$Dx(y) = Ay - Bx(y)$$ (رابطه ۶)

که در آن $D$ عملگر مشتق است و مقادیر $A$ و $B$ عبارتند از:

$$A = \frac{-k(\cos\theta)^2}{q}$$ (رابطه ۷)

$$B = \frac{-k(\cos\theta)^2}{q}\tan\theta$$ (رابطه ۸)

حل تحلیلی رابطه (۶) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$x(y) = \frac{A}{B}y - \frac{A}{B^2} + Ce^{-By}$$ (رابطه ۹)

در رابطه فوق $C$ ثابت انتگرال است.

این تحقیق در نظر دارد به‌منظور بهبود رابطه (۵) در پیش‌بینی پدیده‌های غیردارسی، این معادله را در فضای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری مدل و حل کند. لذا به‌منظور دستیابی به یک حل با استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری، ابتدا معادله (۵) به‌صورت معادله (۱۰) نوشته می‌شود:

$$D^{\alpha}x(y) = Ay - Bx(y)$$ (رابطه ۱۰)

که در آن پارامتر $\alpha$ در بازه صفر و یک تغییر می‌کند. درصورتی‌که مقدار پارامتر $\alpha$ برابر واحد در نظر گرفته شود، معادله (۱۰)، به معادله (۶) کاهش می‌یابد. معادله (۶) تنها برای شرایطی که قانون دارسی برقرار باشد، معتبر است، درصورتی‌که بیشتر شرایط طبیعی به‌ندرت دارسی و معمولاً غیردارسی هستند. لذا در نظر گرفتن مقداری برای $\alpha$ در بازه صفر و یک منطقی خواهد بود. بدیهی است در حالتی که پدیده تحت شرایط قانون دارسی باشد مقدار $\alpha$ برابر یک و در شرایط غیردارسی مقداری غیر از یک خواهد داشت.

به‌منظور دستیابی به یک حل کلی در فضای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری، تبدیل لاپلاس به دو طرف معادله (۱۰) اعمال می‌گردد.

$$L[D^{\alpha}x(y)]+L[Bx(y)]=L[Ay]$$ (رابطه ۱۱)

با انتقال به فضای لاپلاس خواهیم داشت:

$$S^{\alpha}X(S)-S^{\alpha-1}x(0)+BX(S)=A\frac{1}{S^2}$$ (رابطه ۱۲)

با حل معادله برای $X(S)$ یا به‌طور ساده $X$ خواهیم داشت:

$$X=\frac{x(0)S^{\alpha-1}}{S^{\alpha}+B}+\frac{1}{S^{\alpha}+B}\times\frac{A}{S^2}$$ (رابطه ۱۳)

معادله (۱۳) می‌تواند به شکل زیر بازنویسی شود:

$$X=\frac{x(0)}{S}\frac{1}{1+\dfrac{B}{S^{\alpha}}}+\frac{A}{S^{2+\alpha}}\frac{1}{1+\dfrac{B}{S^{\alpha}}}$$ (رابطه ۱۴)

با فرض $1+B/S^{\alpha}<1$، و با استفاده از بسط مک‌لورن معادله (۱۴) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

(رابطه ۱۵)

$$X=\frac{x(0)}{S}\left[1-\frac{B}{S^{\alpha}}+\frac{B^2}{S^{2\alpha}}-\frac{B^3}{S^{3\alpha}}+\cdots\right]+\frac{A}{S^{2+\alpha}}\left[1-\frac{B}{S^{\alpha}}+\frac{B^2}{S^{2\alpha}}-\frac{B^3}{S^{3\alpha}}+\cdots\right]$$

به‌منظور دستیابی به حل از طریق تبدیل لاپلاس، معادله (۱۵) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(رابطه ۱۶)

$$X=x(0)\left[\frac{1}{S}-\frac{B}{S^{\alpha+1}}+\frac{B^2}{S^{2\alpha+1}}-\frac{B^3}{S^{3\alpha+1}}+\cdots\right]+A\left[\frac{1}{S^{2+\alpha}}-\frac{B}{S^{2\alpha+2}}+\frac{B^2}{S^{3\alpha+2}}-\cdots\right]$$

با حل معادله (۱۶) با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس خواهیم داشت:

(رابطه ۱۷)

$$x(y)=x(0)\left[1-\frac{By^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{B^2y^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}-\cdots\right]+Ay\left[\frac{y^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)}-\frac{By^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+2)}+\frac{B^2y^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+2)}-\cdots\right]$$

با استفاده از تعریف تابع میتگ-لفلر، حل (۱۷) به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$x(y)=x(0)\cdot E_{\alpha,1}\left(-By^{\alpha}\right)+\frac{A}{B}y\left[1-E_{\alpha,2}\left(-By^{\alpha}\right)\right]$$ (رابطه ۱۸)

که در آن تابع میتگ-لفلر عبارت است از:

$$E_{\alpha,\beta}\left(Z\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{Z^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)}$$ (رابطه ۱۹)

می‌توان نشان داد درصورتی‌که مقدار $\alpha$ در معادله (۱۸) برابر با یک در نظر گرفته شود، مدل کسری به حل کلاسیک (معادله ۷) کاهش می‌یابد.

با فرض $\alpha=1$ در معادله (۱۳)، برای $X$ خواهیم داشت:

$$X=\frac{x(0)}{S+B}+\frac{1}{S+B}\times\frac{A}{S^2}$$ (رابطه ۲۰)

با حل معادله (۲۰) با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس، معادله (۲۱) به دست می‌آید.

$$x(y)=\frac{A\left(By+e^{-By}-1\right)+x(0)B^2e^{-By}}{B^2}$$ (رابطه ۲۱)

معادله (۲۱) به شکل زیر نیز قابل‌بیان است.

(رابطه ۲۲)

$$x(y)=\frac{e^{-By}\left(AByе^{By}-Ae^{By}+A+x(0)B^2\right)}{B^2}$$

پس از ساده‌سازی معادله (۲۱) خواهیم داشت:

$$x(y)=\frac{A}{B}y-\frac{A}{B^2}+\left(\frac{A}{B^2}+x(0)\right)\cdot e^{-By}$$ (رابطه ۲۳)

که با فرض $A/B^2+x(0)=C$ حل کلاسیک (معادله ۷) به دست می‌آید. همان‌طور که نشان داده شد حل ارائه‌شده توسط معادله (۱۸) یک حل جامع بوده و برای $\alpha=1$ به حل تحلیلی رایج تبدیل می‌شود.

به‌منظور ارزیابی معادله (۱۸) در شرایط واقعی، از سه مجموعه داده‌ی آزمایشگاهی استفاده شد و پارامترهای معادله شامل ضریب هدایت هیدرولیکی و مرتبه کسری، توسط گزینه *solver* نرم‌افزار اکسل و همچنین زبان برنامه‌نویسی متلب محاسبه شدند و نیمرخ سطح آب تحت شرایط آزمایشگاهی به ازای مقادیر محاسبه‌شده ترسیم و سپس بهینه‌ترین نیمرخ سطح آب بر اساس معیار حداقل مجذور مربعات، تعیین گردید.

### تجهیزات آزمایشگاهی

مدل تحقیق حاضر که در شکل (۲) نشان داده شده است، شامل یک کانال آزمایشگاهی به طول ۶/۴ متر، عرض ۰/۸ متر و ارتفاع ۱ متر است که حاوی لایه سنگریزی از مصالح گردگوشه به ضخامت ۶۰ سانتیمتر است. تخلخل مصالح ۴۴ درصد و قطر متوسط مصالح ۷۷/۵ میلی‌متر است. کانال آزمایشگاهی به‌وسیله جک هیدرولیکی تعبیه‌شده در میانه آن قابلیت تنظیم بسیار دقیق شیب کف از صفر تا ۲۰/۳ درصد را دارد. آزمایش‌ها در سه شیب

کف متفاوت تحت دبی‌های مختلف انجام شد. در هر یک از آزمایش‌ها دبی عبوری و نیمرخ طولی سطح آب در محیط متخلخل اندازه‌گیری شد. دبی جریان از طریق جریان‌سنج الکترومغناطیسی با مقدار خطای 0/2± درصد برای حداکثر دبی در حالت مقیاس کامل که بر روی لوله ورودی نصب شده بود اندازه‌گیری گردید و قرائت نیمرخ‌های جریان بعد از ماندگار شدن عمق آب به‌وسیله روش عکس‌برداری و رقومی کردن آن یا روش قرائت مستقیم پیزومتر صورت گرفت. در این بررسی از سه آزمایش در شیب‌های مختلف با مشخصات ذکرشده در جدول (۱) استفاده شده است. ازآنجایی‌که جریان در فلوم آزمایشگاهی زیر بحرانی بود و در جریان زیربحرانی کنترل از سمت پایین‌دست است، عمق آب پایین‌دست محیط متخلخل به‌عنوان شرط مرزی در محاسبات لحاظ شد.


**شکل ۲. نمای کلی کانال آزمایشگاهی**

**جدول ۱. مشخصات آزمایش‌ها در شیب‌های طولی مختلف**

| شیب کف کانال (٪) | دبی (لیتر بر ثانیه) | عمق آب پایین‌دست (میلی‌متر) |
|---|---|---|
| ۰ | ۲۱ | ۱۴۰ |
| ۴ | ۲۰ | ۱۳۰ |
| ۲۰/۳ | ۲۲ | ۱۳۵ |

## نتایج و بحث

در این بخش به نحوه‌ی محاسبه‌ی پارامترهای مدل دیفرانسیل مرتبه کسری دارسی پیشنهادی و ارزیابی نتایج آن و مقایسه‌ی نتایج با داده‌های آزمایشگاهی تحقیق Sedghi-Asl *et al.*, (2014a) پرداخته می‌شود.

پارامترهای مدل کسری پیشنهادی در معادله (۱۸) با استفاده از تجزیه و تحلیل داده‌های آزمایشگاهی قابل تعیین هستند. بدین منظور ابتدا ضریب هدایت هیدرولیکی با استفاده از تکنیک واسنجی، تعیین گردید و سپس مدل به ازای مقادیر مختلف $\alpha$ در بازه صفر تا یک و تا هنگامی که همبستگی مناسبی با داده‌های آزمایشگاهی ایجاد شود، حل و در نهایت بر اساس روش حداقل مجذور مربعات مناسب‌ترین مقدار $\alpha$ برآورد شد.

خطای نتایج پیش‌بینی‌شده مدل نسبت به داده‌های آزمایشگاهی از معادله (۲۴) محاسبه می‌شود، که در آن، $e(\%)$ درصد خطای نسبی، $y_{exp}$ عمق آب آزمایشگاهی و $y_{pre}$ عمق آب محاسبه‌شده توسط مدل است.

$$e(\%)=\left(\frac{y_{\mathrm{exp}}-y_{\mathrm{cal}}}{y_{\mathrm{exp}}}\right)\times 100$$
(رابطه ۲۴)

همچنین برای نیمرخ سطح آب محاسباتی، متوسط خطا نسبت به نیمرخ سطح آب آزمایشگاهی، از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$e_{avg}(\%)=\frac{100}{N}\times\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{(y_{\mathrm{exp}})_i-(y_{\mathrm{cal}})_i}{(y_{\mathrm{exp}})_i}\right|$$
(رابطه ۲۵)

که در آن $N$ تعداد نقاط برداشت عمق در نیمرخ سطح آب آزمایشگاهی است. رابطه (۲۵) برای واسنجی ضرایب مدل استفاده شده است.

### واسنجی ضریب هدایت هیدرولیکی

تمام روش‌های محاسبه نیمرخ سطح آب در محیط متخلخل نیاز به تخمین و برآورد ضریب هدایت هیدرولیکی دارند. با توجه به درشت‌دانه بودن مصالح سنگریز و عدم امکان روش‌های آزمایشگاهی مرسوم در تعیین ضریب هدایت هیدرولیکی، با استفاده از تکنیک واسنجی نسبت به تعیین ضریب هدایت هیدرولیکی اقدام گردید و با در نظر گرفتن عمق آب در محیط

متخلخل به‌عنوان تابع هدف برای شرایط مرزی (عمق آب پایین‌دست) و دبی آزمایشگاهی مشخص در هر شیب، محاسبات به ازای ضرایب مختلف هدایت هیدرولیکی تا هنگامی که اختلاف بین اعماق محاسباتی و مشاهداتی حداقل گردد، ادامه یافت و سرانجام در هر شیب موردنظر یک ضریب هدایت هیدرولیکی (ضریب تناسب) تعیین گردید که مقادیر مربوط به آن در شرایط دارسی ($\alpha$=۱) در جدول (۲) ذکر شده است.

**جدول ۲. ضرایب هدایت هیدرولیکی در شیب‌های طولی مختلف ($\alpha$=۱)**

| شیب کف کانال (٪) | ضریب هدایت هیدرولیکی ($m/s$) $k$ |
|---|---|
| ۰ | ۰/۵۶ |
| ۴ | ۰/۳۸ |
| ۲۰/۳ | ۰/۳۲ |

### تعیین مقادیر بهینه مرتبه کسری

به‌منظور تعیین مقدار بهینه مرتبه‌ی کسری $\alpha$ نیز روندی مشابه با واسنجی ضریب هدایت هیدرولیکی در هر شیب تکرار شد. با این تفاوت که محاسبات به ازای ضرایب مختلف هدایت هیدرولیکی و مقادیر متفاوت $\alpha$ در دامنه صفر تا یک، انجام گردید. سرانجام در هر شیب موردنظر، مقدار بهینه $\alpha$ که به ازای آن اختلاف بین اعماق محاسباتی و مشاهداتی حداقل می‌گردد، تعیین گردید که مقادیر مربوط به آن و همچنین متوسط خطای نیمرخ سطح آب محاسباتی در مقدار بهینه $\alpha$ نسبت به نیمرخ سطح آب آزمایشگاهی و ضریب تبیین که نشان‌دهنده همبستگی نیمرخ‌های محاسباتی با داده‌های آزمایشگاهی است، در جدول (۳) ذکر شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با افزایش شیب کانال (افزایش سرعت و تلاطم جریان و خاصیت غیرخطی بیشتر)، مقدار بهینه $\alpha$ کاهش می‌یابد.

**جدول ۳. تعیین $\alpha$ و ضریب هدایت هیدرولیکی بر مبنای داده‌های آزمایشگاهی**

| شیب کف کانال (٪) | $\alpha$ | ضریب هدایت هیدرولیکی ($m/s$) | میانگین خطا (٪) | $R^2$ |
|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰/۷۱ | ۰/۵۹ | ۳/۵ | ۰/۹۸ |
| ۴ | ۰/۶۵ | ۰/۴۴ | ۲/۲ | ۰/۹۹ |
| ۲۰/۳ | ۰/۵۴ | ۰/۳۶ | ۳/۵ | ۰/۹۹ |

در ادامه به‌منظور اثبات مفهوم فیزیکی مرتبه کسری α، تأثیر ضریب هدایت هیدرولیکی بر مرتبه کسری α مورد بررسی قرار گرفت و رابطه‌ای تجربی به شکل کلی معادله (۲۶) برای برآورد α بر حسب ضریب هدایت هیدرولیکی پیشنهاد گردید.

$$\alpha = a_1 \cdot k^{b_1} \quad \text{(رابطه ۲۶)}$$

که در آن $k$ ضریب هدایت هیدرولیکی مصالح سنگ‌ریز برحسب متر بر ثانیه و $a_1$ و $b_1$ ضرایب تجربی معادله می‌باشند. برحسب مقادیر ارائه‌شده در جدول (۳)، ضرایب $a_1$ و $b_1$ تعیین و معادله تجربی پیشنهادی به شکل معادله (۲۷) ارائه گردید.

$$\alpha = 0.95k^{0.55} \quad \text{(رابطه ۲۷)}$$

مقادیر محاسبه‌شده α از رابطه تجربی پیشنهادی و درصد خطای نسبی آن در جدول (۴) ذکر شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، رابطه‌ی پیشنهادی در دامنه $\alpha \in [0.5,0.75]$ با دقت بسیار بالایی مقادیر مرتبه کسری α را برحسب ضریب هدایت هیدرولیکی برآورد می‌کند. رابطه (۲۷) تأثیر مفاهیم فیزیکی نظیر ضریب هدایت هیدرولیکی مصالح سنگریز را بر مقدار مرتبه کسری معادله حاکم نشان می‌دهد.

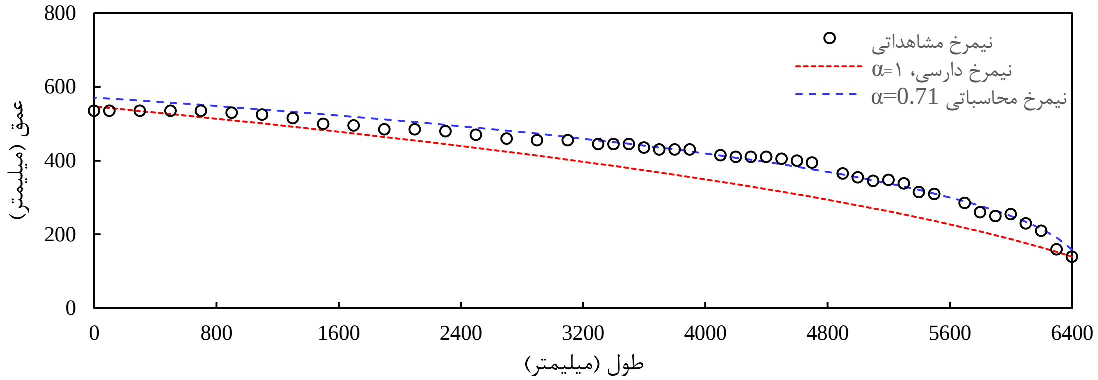
همچنین نتایج تحقیق حاضر با داده‌های آزمایشگاهی و حل تحلیلی مبتنی بر قانون دارسی ($\alpha$=۱) مورد مقایسه قرار گرفت که نمودارهای مربوط به این بررسی در شیب‌های افقی، ۴ درصد و ۲۰/۳ درصد در شکل‌های (۳ تا ۵) نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل کسری ارائه‌شده با داده‌های آزمایشگاهی تطابق مناسبی دارد. در بخش‌های زیر برای هر یک از سه شیب طولی کانال، نتایج مقایسه گرافیکی نیمرخ طولی سطح آب در دو حالت دارسی و غیر دارسی ارائه شده است.

**جدول ۴. مقادیر α محاسباتی**

| مقدار محاسباتی α | خطای نسبی (٪) |
|---|---|
| ۰/۷۱ | ۰ |
| ۰/۶۱ | ۶ |
| ۰/۵۴ | ۰ |

**شیب افقی:** شکل (۳) مقایسه‌ی گرافیکی نیمرخ آزمایشگاهی و نیمرخ محاسباتی سطح آب در حالت $\alpha$=۱ (بیانگر معادله کلاسیک تحت قانون دارسی است) و مقدار بهینه‌شده‌ی $\alpha$ برای داده‌های غیر دارسی در دبی ۲۱ لیتر بر ثانیه و شیب افقی و مصالح گرد گوشه را نشان می‌دهد. خطای متوسط نیمرخ محاسباتی سطح آب در حالت دارسی ($\alpha$=۱) نسبت به نیمرخ آزمایشگاهی، ۱۳/۵ درصد است در حالی که خطای متوسط نیمرخ

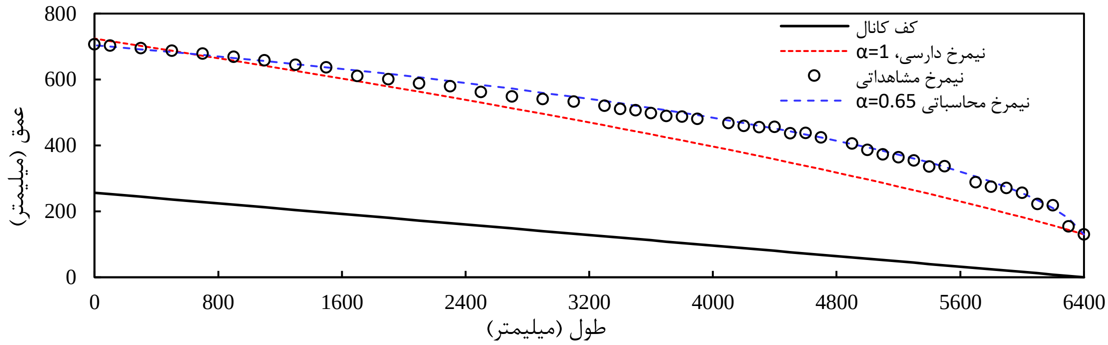
محاسباتی سطح آب در مقدار بهینه‌شده‌ی $\alpha$ نسبت به نیمرخ آزمایشگاهی، ۳/۵ درصد محاسبه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تحقیق حاضر با ۳/۵ درصد متوسط خطا نیمرخ سطح آب را پیش‌بینی می‌کند که نسبت به نیمرخ پیش‌بینی‌شده سطح آب در حالت برقراری قانون دارسی تقریباً ۱۰ درصد بهبود ایجاد شده است.



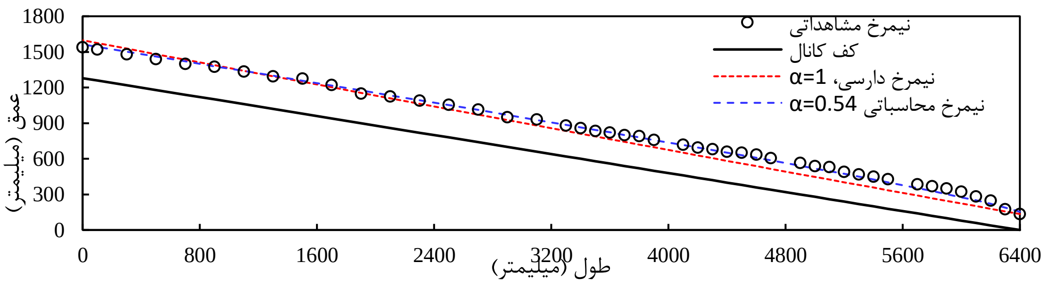

**شکل ۳.** مقایسه نیمرخ پیش‌بینی‌شده توسط مدل کسری و مدل دارسی ($\alpha$=۱) با نیمرخ مشاهداتی در شیب افقی

**شیب ۴ درصد:** در شیب ۴ درصد نیز نیمرخ‌های سطح آب آزمایشگاهی و محاسباتی در دو حالت قانون دارسی ($\alpha$=۱) و مقدار بهینه‌شده‌ی $\alpha$ برای داده‌های غیردارسی در دبی ۲۰ لیتر بر ثانیه و مصالح گرد گوشه در شکل (۴) ارائه شده است. متوسط خطای نیمرخ محاسباتی سطح آب در حالت دارسی ($\alpha$=۱) نسبت به نیمرخ آزمایشگاهی، ۱۴ درصد است در حالی که خطای متوسط نیمرخ سطح آب در $\alpha$=۰/۶۵ نسبت به نیمرخ آزمایشگاهی سطح آب، ۲/۲ درصد است که نسبت به نیمرخ سطح آب در حالت ۱=$\alpha$، ۱۲ درصد بهبود ایجاد شده است.

**شیب ۲۰/۳ درصد:** مطابق آنچه در شیب‌های افقی و ۴ درصد انجام شد، در شیب ۲۰/۳ درصد نیمرخ‌های سطح آب آزمایشگاهی و محاسباتی در دو حالت $\alpha$=۱ و مقدار بهینه‌شده $\alpha$، در دبی ۲۲ لیتر بر ثانیه در شکل (۵) ارائه شده است. خطای متوسط نیمرخ محاسباتی سطح آب در حالت دارسی ($\alpha$=۱) نسبت به نیمرخ آزمایشگاهی، ۱۰/۵ درصد محاسبه گردید، در حالی که خطای متوسط نیمرخ سطح آب در مقدار بهینه‌شده $\alpha$ نسبت به نیمرخ آزمایشگاهی سطح آب، ۲/۲ درصد است.




**شکل ۴.** مقایسه نیمرخ پیش‌بینی‌شده توسط مدل کسری و مدل دارسی ($\alpha$=۱) با نیمرخ مشاهداتی در شیب ۴ درصد




**شکل ۵.** مقایسه نیمرخ پیش‌بینی‌شده توسط مدل کسری و مدل دارسی ($\alpha$=۱) با نیمرخ مشاهداتی در شیب ۲۰/۳ درصد

همان‌گونه که شکل‌های (۳) تا (۵) نشان می‌دهند، در مدل پیشنهادی در حالتی که $\alpha$=۱ در نظر گرفته شود، نیمرخ سطح آب بر مبنای قانون دارسی به‌دست می‌آید که از نیمرخ مشاهداتی سطح آب فاصله دارد. این اختلاف به دلیل رابطه خطی در نظر گرفته‌شده بین سرعت جریان و گرادیان هیدرولیکی در مدل دارسی است. در حالی که رفتار جریان در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه و شرایط برقراری جریان آشفته کاملاً توسعه‌یافته، به دلیل بزرگی اندازه ذرات و منافذ و بروز سرعت‌های بالا و آشفتگی در جریان رابطه بین سرعت جریان و گرادیان هیدرولیکی غیرخطی است، لذا با توجه به متفاوت بودن ماهیت قانون دارسی با جریان‌های غیردارسی ناتوانی مدل دارسی در پیش‌بینی نیمرخ سطح آب در جریان‌های متلاطم قابل توجیه است. همچنین مطابق نمودارها، بالاتر بودن عمق آب در جریان متلاطم کاملاً توسعه‌یافته نسبت به عمق پیش‌بینی‌شده توسط قانون دارسی بیانگر اهمیت بیشتر نیروهای افت فشار در جریان‌های آشفته نسبت به نیروهای چسبندگی می‌باشد (Sedghi-Asl *et al.*, 2014b). برخلاف نظر عمومی که بیان‌کننده عدم پیش‌بینی درست خط نشت در نزدیکی خروجی توسط فرضیات دوپوئی است، نتایج تحقیق حاضر نشان می‌دهند که فرضیات دوپوئی توانسته است پیش‌بینی درستی از نیمرخ سطح آب در نزدیکی خروجی ارائه دهد و این موضوع با یافته‌های پژوهش Sedghi-Asl *et al.* (2014b) همخوانی دارد.

به نظر می‌رسد، استفاده از محاسبات کسری برای مدل‌های فیزیکی و فرایندهای مهندسی باعث بیان بهتر آن‌ها می‌شود. علت اینکه تعریف معادله (۵) در محیط معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توانسته است توصیف بهتری از نیمرخ سطح آب در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه ارائه دهد به دلیل ویژگی این نوع از معادلات است. در معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه صحیح، تابع در یک بازه بسیار کوچک تعریف می‌گردد، در حالی که در معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ویژگی‌های کل تابع در یک نقطه لحاظ می‌گردد. در نتیجه به نظر می‌رسد بسیاری از مدل‌های ریاضی خطی که بر اساس معادله دیفرانسیل جزئی معمولی با مرتبه اعداد صحیح هستند را می‌توان با تجدید نظر در مرتبه آن‌ها بهینه و دقیق‌تر نمود به‌طوری‌که بتوانند توصیف قابل قبولی از معادلات غیرخطی ارائه نمایند که این امر از تفسیر نمودارهای شکل‌های (۳) تا (۵) کاملاً مشهود است. با توجه به نمودارها و همچنین جدول (۳) مشاهده می‌گردد که مدل کلاسیک دارسی با تجدیدنظر در مرتبه‌ی آن، توانسته است نیمرخ سطح آب را در جریان‌های غیر دارسی با دقت قابل قبولی پیش‌بینی نماید و توصیف بهتری از نیمرخ سطح آب در جریان‌های غیر دارسی ارائه کند. پیش از این نیز Zhou and Yang (2018) مدل دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری معادله افت دارسی را ارائه کردند که توصیفی غیرخطی از وابستگی بین سرعت و گرادیان هیدرولیکی از مرتبه‌ی $\alpha$ ارائه داده‌اند که معادله دارسی را به‌عنوان حالتی خاص از آن بیان نموده‌اند.

به‌منظور تحقیق بیشتر در توانایی معادلات دیفرانسیل کسری در مدل‌سازی جریان‌های غیر دارسی، مقایسه‌ای بین نتایج مطالعه حاضر با حل تحلیلی جریان‌های آشفته کاملاً توسعه‌یافته (جریان‌های غیردارسی) یک‌بعدی که توسط Sedghi-Asl *et al.* (2014b) ارائه شده است، صورت گرفت. ایشان با ترکیب معادلات پیوستگی جریان و افت فشار غیرخطی در حالت جریان متلاطم کاملاً توسعه‌یافته در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه شیب‌دار، یک حل تحلیلی برای جریان‌های غیردارسی یک‌بعدی ارائه کردند. نتایج مطالعه حاضر با نتایج معادله مربوط به جریان‌های متلاطم کاملاً توسعه‌یافته با اندکی خطا نسبت به یکدیگر پیش‌بینی درستی از نیمرخ سطح آب در محیط متخلخل درشت‌دانه ارائه می‌کنند که مقایسه گرافیکی آن‌ها نسبت به یکدیگر و نسبت به نیمرخ سطح آب آزمایشگاهی در شکل (۶) نشان داده شده است.

مقادیر خطای متوسط نیمرخ سطح آب محاسباتی کسری در $\alpha$ بهینه‌شده و روش غیر دارسی Sedghi-Asl *et al.* (2014b) نسبت به داده‌های آزمایشگاهی در شیب افقی به ترتیب ۳/۵ درصد و ۲/۳ درصد می‌باشند. این مقادیر در شیب چهار درصد به ترتیب ۲/۲ درصد و ۲/۶ درصد و در شیب ۲۰/۳ درصد نیز به ترتیب ۳/۵ درصد و ۳/۶ درصد می‌باشند. همچنین به‌منظور مقایسه بهتر از شاخص آماری نش-شاتکلیف[1] که در رابطه (۲۸) نشان داده شده است، استفاده گردید.

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{\exp i} - y_{cali}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{\exp i} - \bar{y}_{\exp}\right)^2} \qquad \text{(رابطه ۲۸)}$$

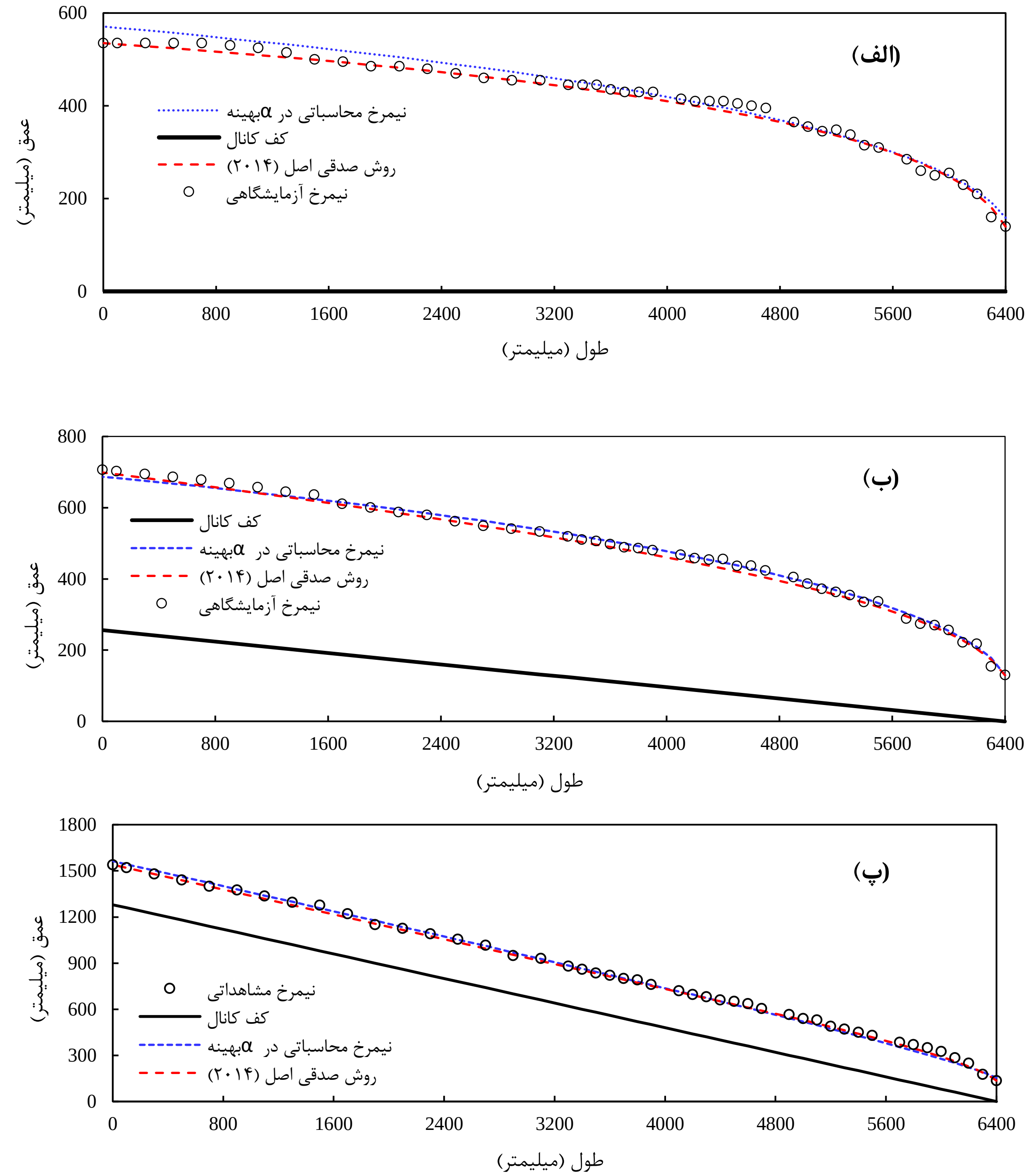
در رابطه فوق، $y_{expi}$ عمق آزمایشگاهی، $y_{cali}$ عمق محاسبه‌شده و $n$ تعداد داده‌ها است.

شاخص *NSE*، اندازه‌گیری میزان مناسب بودن مدل را انجام می‌دهد و هر چقدر که شبیه‌سازی به‌طور قابل قبولی با نتایج مشاهداتی شبیه باشد به مقدار ۱ نزدیک می‌شود. معمولاً مقدار بالای ۰/۹ بیانگر دقت بسیار بالای مدل است. شاخص *NSE* برای مدل پیشنهادی در $\alpha$ بهینه‌شده و روش غیر

1. Nash-Sutcliffe Coefficient

دارسی Sedghi-Asl *et al.* (2014b) در شیب افقی به ترتیب ۰/۹۷ و ۰/۹۹ است. این شاخص در شیب چهار درصد به ترتیب ۰/۹۸ و ۰/۹۶ و در شیب ۲۰/۳ درصد نیز به ترتیب ۰/۹۹ و ۰/۹۸ است.

از بررسی شکل (۶) و همچنین مقادیر خطای متوسط نیمرخ سطح آب محاسباتی کسری در $\alpha$ بهینه‌شده و روش غیردارسی Sedghi-Asl *et al.* (2014b) و همچنین شاخص آماری نش-شاتکلیف نتیجه‌گیری می‌شود که مدل کسری ارائه‌شده در این تحقیق به‌خوبی نیمرخ سطح آب را پیش‌بینی کند. مدل کسری پیشنهادی عمق آب در ابتدای کانال افقی را اندکی بیشتر از حد واقعی پیش‌بینی می‌کند ولی مطابق شکل (۶) مدل پیشنهادی در کانال‌های شیب‌دار از مدل موجود دقیق‌تر است.




**شکل ۶.** مقایسه گرافیکی مدل کسری و مدل ارائه‌شده توسط صدقی اصل و همکاران (۲۰۱۴b) با داده‌های آزمایشگاهی در سه شیب الف) افقی، ب) ۴ درصد و پ) ۲۰/۳ درصد

## نتیجه‌گیری

هدف از تحقیق حاضر توصیف رفتار جریان‌های غیردارسی با استفاده از رویکرد معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری است. بر این اساس، یک مدل کسری بر مبنای قانون دارسی برای نیمرخ سطح آب در جریان‌های غیردارسی ارائه گردید و به‌صورت تحلیلی حل شد و پارامترهای مدل پیشنهادی با استفاده از تجزیه و تحلیل

داده‌های آزمایشگاهی و با روش حداقل کردن میانگین خطا تعیین گردید. همچنین مشاهده شد که مرتبه‌ی کسری مدل دارای مفهوم فیزیکی و مرتبط با ضریب هدایت هیدرولیکی مصالح سنگ‌ریز است. نتایج به‌دست‌آمده با داده‌های آزمایشگاهی و حل تحلیلی مبتنی بر قانون دارسی مورد مقایسه قرار گرفت و تطابق مناسبی با داده‌های آزمایشگاهی مربوط به جریان‌های غیردارسی مشاهده شد. همچنین به‌منظور تحقیق در توانایی معادلات دیفرانسیل کسری در مدل‌سازی، مقایسهای بین مدل پیشنهادی با مدل جریان‌های متلاطم کاملاً توسعه‌یافته یک‌بعدی که توسط Sedghi-Asl *et al.* (2014b) ارائه شده است، صورت گرفت که هر دو مدل با اندکی خطا نسبت به یکدیگر پیش‌بینی درستی از نیمرخ سطح آب در محیط متخلخل درشت‌دانه ارائه می‌کنند. علاوه بر این مشاهده گردید که مدل کسری پیشنهادی، در شیب‌های زیادتر توانسته است توصیف بهتری از نیمرخ سطح آب ارائه نماید. در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت که مدل کسری ارائه‌شده در این تحقیق، نسبت به مدل دارسی، توانایی توصیف بهتری در پیش‌بینی نیمرخ سطح آب جریان در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه دارد.

## REFERENCES


Bari, R., and Hansen, D. (2002). Application of gradually-varied flow algorithms to simulate buried streams. Journal of Hydraulic Research, 40(6), 673-683.

Bazargan, J., and Shoaei, S. M. (2006). Application of gradually varied flow algorithms to simulate buried streams.advection-dispersion equation. *Water resources research*, 36(6), 1403-1412.

Benson, D. A., Wheatcraft, S. W., and Meerschaert, M. M. (2000). Application of a fractional advection dispersion equation. *Water resources research*, 36(6), 1403-1412.

Cooke, R. A., Badiger, S., and Garcıa, A. M. (2001). Drainage equations for random and irregular tile drainage systems. *Agricultural Water Management*, 48(3), 207-224.

Ding, Z., Xiao, A., and Li, M. (2010). Weighted finite difference methods for a class of space fractional partial differential equations with variable coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 233(8), 1905-1914.

Harr, M. E. (1963). Groundwater and seepage. Soil Science, 95(4), 289.

Huang, Q., Huang, G., and Zhan, H. (2008). A finite element solution for the fractional advection–dispersion equation. *Advances in Water Resources*, 31(12), 1578-1589.

Kavvas, M. L., and Ercan, A. (2014). Fractional governing equations of diffusion wave and kinematic wave open-channel flow in fractional time-space. I. Development of the equations. *Journal of Hydrologic Engineering*, 20(9), 04014096.

Martinez, F. S. J., Pachepsky, Y. A., and Rawls, W. J. (2010). Modelling solute transport in soil columns using advective–dispersive equations with fractional spatial derivatives. *Advances in engineering software*, 41(1), 4-8.

Moutsopoulos, K. N. (2009). Exact and approximate analytical solutions for unsteady fully developed turbulent flow in porous media and fractures for time dependent boundary conditions. *Journal of Hydrology*, 369(1-2), 78-89.

Oldham, K., and Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order (Vol. 111). Elsevier.

Parkin, A. K. (1963). Rockfill Dams with Inbuilt Spillways: Hydraulic Characteristics. Water Research Foundation of Australia.

Pavlovsky, N. N. (1956). Collected works, Izd. AN SSSR Moscow–Leningrad, USSR.

Podlubny, I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications (Vol. 198). Elsevier.

Reddi, L. N. (2003). Seepage in soils: principles and applications. John Wiley & Sons.

Sarkhosh, P., Samani, J. M. V., and Mazaheri, M. (2017). A one-dimensional flood routing model for rockfill dams considering exit height. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Water Management* 171(1), 42-51.

Schumer, R., Benson, D. A., Meerschaert, M. M., and Wheatcraft, S. W. (2001). Eulerian derivation of the fractional advection–dispersion equation. *Journal of contaminant hydrology*, 48(1-2), 69-88.

Sedghi-Asl, M., and Ansari, I. (2016). Adoption of Extended Dupuit–Forchheimer Assumptions to Non-Darcy Flow Problems. *Transport in Porous Media*, 113(3), 457-469.

Sedghi-Asl, M., Farhoudi, J., Rahimi, H., and Hartmann, S. (2014b). An analytical solution for 1-D non-Darcy flow through slanting coarse deposits. *Transport in porous media*, 104(3), 565-579.

Sedghi-Asl, M., Rahimi, H., Farhoudi, J., Hoorfar, A., and Hartmann, S. (2014a). One-dimensional fully developed turbulent flow through coarse porous medium. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19(7), 1491-1496.

Stephenson, D. J. (1979). Rockfill in hydraulic engineering (Vol. 27). Elsevier.

Wheatcraft, S. W., and Meerschaert, M. M. (2008). Fractional conservation of mass. *Advances in Water Resources*, 31(10), 1377-1381.

Wilkins, J. K. (1955). Flow of water through rock fill and its application to the design of dams. *New Zealand Engineering*, 10(11), 382.

Zhou, H. W., and Yang, S. (2018). Fractional derivative approach to non-Darcian flow in porous media. *Journal of hydrology*, 566, 910-918.