

## Flood Routing using Muskingum Model with Fractional Derivative

MIRMOHAMMAD BAYRAMI<sup>1</sup>, ALIREZA VATANKHAH<sup>2\*</sup>, AREZOO NAZI GHAMESHLOU<sup>3</sup>

1. PhD Candidate of Water Structures, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, Faculty of Agricultural Engineering and Technology, University College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran

2. Associate Professor, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, Faculty of Agricultural Engineering and Technology, University College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

3. Assistant Professor, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, Faculty of Agricultural Engineering and Technology, University College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran

(Received: Feb. 14, 2019- Revised: Apr. 12, 2019- Accepted: Apr. 16, 2019)

### ABSTRACT

The existing Muskingum models vary only in the form of the storage equation. So far, for accounting the nonlinearity characteristic of flood wave, the form of the storage equation has been modified based on the experience and in a trial and error manner in order to capture the overall flood propagating characteristics more accurately. One of the theoretical based method for considering the nonlinear characteristics in Muskingum model is to use the fractional derivative in the continuity differential equation. This study presents a new Muskingum model in which the linear storage equation and the continuity equation with fractional derivative are used. As shown in this study, the new model can simulate flood waves with both linear and nonlinear behaviors. The proposed Muskingum model with fractional derivative order was implemented and tested on three different sets of flood data. The results of this study indicate that the proposed Muskingum model improves the results and estimates the flood wave characteristics more accurately than the traditional linear Muskingum models.

**Keywords:** Flood routing, Nonlinear model, Hydrograph, Muskingum model, Fractional derivative.

## روندیابی سیلاب با استفاده از مدل ماسکینگام با مشتق مرتبه کسری

میر محمد بایرامی<sup>۱</sup>، علیرضا وطن خواه<sup>۲\*</sup>، آرزو نازی قمشلو<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی دکتری، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

۲. دانشیار، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی دانشکده مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

۳. استادیار، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱۱/۲۵ - تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۱/۲۳ - تاریخ تصویب: ۱۳۹۸/۱/۲۷)

### چکیده:

مدل‌های ماسکینگام موجود تنها در معادله ذخیره با یکدیگر متفاوت هستند. تاکنون به منظور لحاظ نمودن ویژگی غیرخطی موج سیلاب، ساختار معادله ذخیره بر اساس تجربه و به شیوه آزمون و خطا اصلاح شده است تا مشخصات کلی سیل دقیق تر مدل شود. یکی از روش‌های با مبنای تئوری برای لحاظ نمودن ویژگی‌های غیرخطی در مدل روندیابی ماسکینگام، استفاده از مشتق مرتبه کسری در معادله دیفرانسیل پیوستگی است. تحقیق حاضر به ارائه مدل جدیدی از ماسکینگام می پردازد که در آن از معادله خطی ذخیره و معادله دیفرانسیل پیوستگی از مرتبه کسری استفاده شده است. همان‌طور که در این تحقیق نشان داده شده است، مدل جدید قادر است هم سیلاب‌های با رفتار خطی و هم رفتار غیرخطی را شبیه‌سازی کند. مدل پیشنهادی ماسکینگام از مرتبه کسری، برای سه مجموعه‌ی مختلف از داده‌های سیل اجرا و آزمایش شد. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که مدل ماسکینگام پیشنهادی منجر به بهبود نتایج می‌شود و به طور مؤثر، ویژگی‌های موج سیلاب را نسبت به مدل‌های سنتی ماسکینگام بهتر تخمین می‌زند.

**واژه‌های کلیدی:** روندیابی سیلاب، مدل غیرخطی، هیدروگراف، مدل ماسکینگام، مشتق مرتبه کسری.

### مقدمه

روندیابی سیلاب به مجموعه روش‌های تعیین هیدروگراف پایین‌دست جریان یک رودخانه یا آبراهه با استفاده از هیدروگراف معلوم در بالادست اطلاق می‌شود و یکی از شیوه‌های با اهمیت برای شناخت و کنترل تأثیرات جریان در مسیر رودخانه و پیش‌بینی سیلاب است. دو رویکرد هیدرولیکی و هیدرولوژیکی برای روندیابی سیلاب وجود دارد (Chaudhry, 2007). رویکرد هیدرولیکی توصیف کامل‌تری از موج سیلاب را ارائه می‌دهد اما به دلیل پیچیدگی محاسباتی و نیاز به داده‌های بیشتر، از کاربرد کمتری نسبت به رویکرد هیدرولوژیکی در مسائل پیش‌بینی سیلاب برخوردار است. در میان انواع روش‌های روندیابی سیلاب در آبراهه‌های طبیعی و رودخانه‌ها، روش ماسکینگام یکی از روش‌های روندیابی هیدرولوژیکی سیلاب است که به دلیل سادگی، کاربرد زیادی دارد. این روش توسط McCarthy (1938) در ارتباط با مطالعه پروژه کنترل سیل ناحیه ماسکینگام توسط مهندسين ارتش آمریکا ارائه شده است. روش ماسکینگام با توجه به خصوصیات منطقه و رودخانه مورد مطالعه می‌تواند در دو حالت خطی و غیرخطی مدنظر قرار گیرد. در هر دو حالت؛ ضمن حل معادلات، نیاز به تخمین پارامترهای مدل می‌باشد که با استفاده

از روش سعی و خطا و مبنای بهینه‌سازی انجام می‌شود و تاکنون مطالعات زیادی برای بهبود دقت پیش‌بینی روش‌های بهینه‌سازی انجام شده است.

Nash (1959) یک روش حل دقیق برای معادله روندیابی سیلاب برای حالتی که ذخیره تابع وزنی خطی از جریان‌های ورودی و خروجی باشد ارائه داد. در این تحقیق ضرایب اصلاحی برای معادله ماسکینگام به گونه‌ای توسعه داده شد که به کوچک بودن گام زمانی روندیابی نسبت به پارامتر روندیابی  $k$  بستگی نداشته باشد. Diskin (1967) با بحث بر روی راه‌حل‌های قبلی منتشر شده برای معادله روندیابی ماسکینگام، یک راه‌حل عمومی با استفاده از تبدیل لاپلاس ارائه داد و بیان داشت که راه‌حل‌های قبلی یا محدود به موارد خاصی از جریان بوده و یا بدون اثبات ارائه شده‌اند. Singh and Scarlators (1989) مدل غیرخطی ماسکینگام را مورد ارزیابی قرار دادند و نشان دادند که دقت نتایج وابستگی زیادی به تخمین پارامترهای روندیابی دارد. (1990) Aldama روش تخمین حداقل مربعات پارامترهای روندیابی سیلاب ماسکینگام خطی پیشنهاد شده توسط Gill (1977)، (1984) Heggen و (1985) O'Donnell را مورد بررسی و مقایسه قرار داد. Gill (1992) روش تأخیر زمانی را به عنوان یک راه‌حل

انتگرال را در مرتبه‌های غیر صحیح مثبت بیان می‌کند. اهمیت این روش به دلیل خاصیت غیرموضعی مشتق کسری برخلاف مشتق مرتبه صحیح می‌باشد که برای بررسی پدیده‌هایی که خصوصیات آن‌ها وابسته به مکان و زمان است روش مناسبی تلقی می‌شود. (Moussa and Bocquillon (2001 از روش مشتق کسری برای حل معادلات موج دیفیوژن در کانال روباز همراه با جریان جانبی استفاده کردند. نتایج تحلیل ریاضی نشان از دقت و کارایی مناسب این روش برای حل معادله موج دیفیوژن تحت شرایط مختلف توزیع مکانی و زمانی جریان جانبی دارد. Kavvas and Ercan (2014) معادلات حاکم کسری برای تقریب موج کینماتیک و دیفیوژن جریان غیرماندگار در کانال روباز منشوری را در حالت کسری مکان-زمان توسعه دادند و اثبات کردند که این معادلات از لحاظ ابعادی نیز برقرار هستند. Ercan and Kavvas (2017) یک رویکرد عددی تفاضل محدود را برای حل معادلات حاکم مرتبه کسری مکان-زمان جریان یک‌بعدی غیر ماندگار-غیریکنواخت به کار گرفتند و نتایج عددی معادلات مرتبه کسری حاکم را با معادلات استاندارد سنت و نانت مقایسه نمودند. Kavvas and Ercan (2016) معادلات حاکم مرتبه کسری مکان-زمان را برای جریان غیر ماندگار در کانال‌های روباز توسعه دادند و تقریب موج کینماتیک و دیفیوژن را برای جریان غیرماندگار در شرایط فیزیکی قابل تفسیر از مرتبه کسری مکان-زمان، با استفاده از معادلات پیوستگی و مومنتوم کسری ارائه دادند.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود تاکنون مطالعات زیادی در ارتباط با بهبود دقت روش روندیابی ماسکینگام انجام شده است. همچنین در سال‌های اخیر ابزار محاسبات کسری در توصیف پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار گرفته است و نتایج آن حاکی از مناسب بودن این ابزار در مطالعات علوم مهندسی می‌باشد. در این تحقیق با استفاده از تئوری مشتق مرتبه کسری، ویژگی غیرخطی در معادله دیفرانسیل پیوستگی مدل ماسکینگام خطی (معادله ذخیره خطی) لحاظ شده و مثال‌های کاربردی مختلف به منظور ارزیابی و مقایسه این روش با روش سنتی ماسکینگام مورد مطالعه قرار گرفته است.

### مواد و روش‌ها

معادلات حاکم بر جریان‌های غیردائمی در آبراهه‌های روباز، معادلات پیوستگی و اندازه حرکت بوده و به معادلات سنت و نانت معروف هستند. روندیابی هیدرولوژیکی ترکیب معادله‌ی پیوستگی با یک معادله‌ی خطی یا غیرخطی ذخیره در یک بازه از مسیر

عددی برای معادله روندیابی ماسکینگام به کار برد و بیان داشت که این روش دبی‌های منفی در ابتدای محاسبات را از بین می‌برد و پیوستگی جریان را ارضا می‌کند.

(Gelegenis and Serrano (2000 با به‌کارگیری تحلیل رگرسیون بر مبنای دو روش عددی ضمنی و نیمه ضمنی، یک الگوریتم جایگزین برای تخمین پارامترهای مدل ماسکینگام خطی ارائه دادند. (Barati (2013 با استفاده از گزینه ماکرو در اکسل پارامترهای مدل غیرخطی ماسکینگام را محاسبه نمود. (Ouyang et al. (2014 پارامترهای مدل خطی ماسکینگام را با یک روش بهینه‌سازی ترکیبی از سه روش<sup>۱</sup> NMSM،<sup>۲</sup> PSO و<sup>۳</sup> HPSO تخمین زده و به مقایسه آن با سایر روش‌ها پرداختند. (Vatankhah (2014 ارزیابی روش‌های صریح حل عددی مدل ماسکینگام غیرخطی پرداخت. در این مطالعه با بررسی چهار روش اویلر، اویلر اصلاح شده، روش رانگ کوتای مرتبه چهار و روش رانگ کوتا فلبرگ، روش رانگ کوتای مرتبه چهار به عنوان روشی با دقت مناسب معرفی شده است. در مدل‌های روندیابی ماسکینگام از یک معیار واحد (تابع هدف) در فرآیند واسنجی استفاده می‌شود. بعضی از مدل‌ها برای این منظور، مجموع مربعات خطا بین دبی خروجی مشاهداتی و تخمینی را به حداقل می‌رسانند و بعضی دیگر مجموع مربعات خطا بین ذخیره مشاهداتی و تخمینی را معیار قرار می‌دهند. (Easa (2014a یک تحقیق جدید را که هر دو معیار را در فرآیند واسنجی مدنظر قرار می‌دهد پیشنهاد داد و نشان داد که نتایج این مدل به طور قابل ملاحظه‌ای در مقایسه با مدل‌های تک معیاره بهبود می‌یابد. (Easa (2015 مدل پنج پارامتره معادله غیرخطی ماسکینگام را با تابع هدف<sup>۴</sup> SSQ و با توجه به هیدروگراف خروجی بهینه‌سازی نمود. نتایج این تحقیق نشان داد که در شرایط متفاوت هیدروگراف ورودی و شرایط رودخانه از کدام تابع و شیوه روندیابی استفاده شود تا خطا حداقل گردد.

بسیاری از محققان بر بهبود عملکرد مدل ماسکینگام در مرحله واسنجی با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی جدید و رویکردهای بهینه‌سازی متفاوت تمرکز کرده‌اند. اما، این تلاش‌ها موفقیت کمی را به دست آورده‌اند (Easa, 2014b). این مطالعه به بهبود ساختار مدل ماسکینگام، به جای الگوریتم‌های بهینه‌سازی که در اکثر موارد عملاً موجب بهبود کمی می‌شود، تمرکز دارد. یکی از روش‌های با مبنای تئوری برای بهبود و بالا بردن دقت مدل‌های ریاضی برای مسائل مهندسی، مباحث مربوط به حسابان کسری<sup>۵</sup> است. حسابان کسری عملگرهای مشتق و

4. Sum of the squared deviations between observed and estimated outflows  
5. Fractional Calculus

1. Nelder-Mead Simplex Method  
2. Particles Swarm Optimization  
3. Hybrid Particle Swarm Optimization

جریان می‌باشد. در این روش با انتگرال‌گیری از معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\frac{dS}{dt} = I - O \quad (\text{رابطه ۱})$$

در این معادله  $S$  حجم ذخیره در بازه‌ی آبراهه است و به صورت انتگرال  $\int_{x_0}^{x_i} Adx$  در طول آبراهه از  $x_0$  تا  $x_i$  تعریف می‌شود و دارای بعد  $(L^3)$  می‌باشد  $(x_0$  و  $x_i$ ) به ترتیب مکان مربوط به ابتدا و انتهای بازه‌ی آبراهه مورد نظر و  $A$  سطح مقطع عرضی آبراهه با بعد  $(L^2)$  می‌باشد،  $I$  دبی ورودی به بازه  $(L^3T^{-1})$  و  $O$  دبی خروجی از بازه  $(L^3T^{-1})$  در زمان مشخص  $t$  می‌باشد. در مدل ماسکینگام؛ معادله اصلی جهت روندیابی سیلاب بر پایه معادله پیوستگی است و با برقراری روابط جبری میان ذخیره و دبی‌های ورودی و خروجی فرآیند روندیابی انجام می‌شود. در مدل خطی ماسکینگام رابطه جبری ذخیره به صورت رابطه خطی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$S = K [XI + (1 - X)O] \quad (\text{رابطه ۲})$$

که در آن،  $K$  به طور تقریبی زمان انتقال موج از ابتدا تا انتهای بازه  $(T)$  و  $X$  عامل وزنی بدون بعد  $(-)$  است که اثرات ورودی و خروجی را بر روی ذخیره بیان می‌کند. استفاده از مدل ماسکینگام شامل دو مرحله واسنجی و شبیه‌سازی است. در مرحله واسنجی با استفاده از یک سری هیدروگراف ورودی و خروجی که هم‌زمان اتفاق افتاده است مدل واسنجی شده و پارامترهای روندیابی محاسبه می‌شود. در نهایت پس از واسنجی، در مرحله شبیه‌سازی می‌توان روندیابی سیل را در یک بازه از رودخانه برای سیلاب‌های آینده با مشخصات مشابه انجام داد. مسئله روندیابی سیلاب تعیین  $O$  برای هر  $I$ ،  $k$  و  $x$  مشخص با استفاده از معادلات (۱) و (۲) می‌باشد، با استفاده از معادله (۲) می‌توان نوشت:

$$O^i = \frac{\left(\frac{S^i}{k}\right)}{1-x} - \frac{xI^i}{1-x} \quad (\text{رابطه ۳})$$

که در آن بالانویس  $i$  بیانگر گام زمانی می‌باشد. با جایگذاری معادله (۳) در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{I^i - \left(\frac{S^i}{k}\right)}{1-x} \quad (\text{رابطه ۴})$$

برای مقادیر مشخص  $I$ ،  $k$  و  $x$  معادله (۴) یک معادله دیفرانسیل مرتبه یک است که برای حل نیازمند شرط اولیه است. این معادله دیفرانسیل به جز برای هیدروگراف‌های ورودی خاص

نظیر افزایش ناگهانی بده ورودی، هیدروگراف ورودی به صورت تابع خطی از زمان و یا هیدروگراف ورودی به صورت تابع سینوسی، در حالت کلی دارای حل تحلیلی نیست و برای حل آن از روش-های عددی استفاده می‌شود (Gill, 1979 and Gill 1989). ساده-ترین روش حل عددی برای معادله دیفرانسیل مرتبه یک، روش اولیور است. به ازای زمان شبیه‌سازی  $(T)$ ، تعداد داده‌ها  $(n+1)$  و با فرض گام زمانی  $\Delta t$  فرم اولیوری (تفاضل محدود پیشرو) معادله دیفرانسیل (۴) به صورت زیر خواهد بود  $(T=n\Delta t)$ :

$$\frac{S^{i+1} - S^i}{\Delta t} = \frac{I^i - \left(\frac{S^i}{k}\right)}{1-x}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (\text{رابطه ۵})$$

این روش حل از جمله روش‌های حل صریح می‌باشد که به ازای مقادیر  $k$  و  $x$  و مقادیر معلوم  $I^i$  و  $S^i$ ، مقدار ذخیره در هر گام زمانی  $(S^{i+1})$  محاسبه می‌شود و در نهایت با استفاده از معادله (۳)، دبی خروجی در هر گام زمانی تعیین می‌گردد.

#### مدل ماسکینگام مرتبه کسری

حسابان کسری تعمیمی از حسابان معمولی است که با استفاده از آن می‌توان انتگرال و مشتق با مرتبه‌های دلخواه را محاسبه کرد (Podlubny, 1999; Kilbas et al., 2006). یکی از خواص بسیار مهم مشتقات مرتبه کسری این است که برخلاف مشتقات مرتبه صحیح، این نوع مشتقات غیرموضعی هستند، به عبارت دیگر خصوصیات مشتق مرتبه کسری تابع در یک نقطه، بستگی به خصوصیات تابع در تمام نقاط موجود در دامنه تابع دارد (Huang et al., 2008). وجود این خاصیت باعث شده است که برای بررسی پدیده‌هایی که خصوصیات آن‌ها وابسته به مکان و زمان است مشتقات مرتبه کسری روش مناسبی تلقی شود. روش‌های گوناگونی برای تعمیم مشتق‌گیری کسری وجود دارد که از آن جمله مشتق کسری ریمان-لیوویل، مشتق کسری گراندوالد-لتنیکوف و مشتق کسری کاپوتو است. با توجه به اینکه مشتق کاپوتو می‌تواند شرایط اولیه و مرزی واقعی را در نظر بگیرد، بدین معنی که معادلات دیفرانسیل با مشتقات کاپوتو حاوی مشتقات مرتبه صحیح قابل تفسیر در زمان‌های اولیه و در مرزهای مکانی بالادست هستند، به همین دلیل در بیشتر کارهای مهندسی از روش مشتق کسری کاپوتو استفاده می‌شود. در روش مشتق کسری کاپوتو، ابتدا مشتق مرتبه اول و سپس انتگرال جزئی از تابع گرفته می‌شود، مشتق کسری در مفهوم کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{1}{(t-x)^{\alpha+1-m}} \frac{d^{(m)}f(x)}{dt^{(m)}} dx, \quad \alpha > 0, m-1 \leq \alpha \leq m$$

برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه کسری (۱۰) مقدار اولیه ذخیره،  $S^0$ ، در حالت  $0 < \alpha < 1$  و مقادیر اولیه ذخیره  $S^0$  و مشتق آن  $(S^0)'$  در حالت  $1 < \alpha < 2$  مورد نیاز می‌باشد. اگر مقدار دبی خروجی محاسباتی در لحظه صفر به صورت  $(O^0)^{computed}$  و مقدار دبی ورودی مشاهداتی در لحظه صفر به صورت  $(I^0)^{observed}$  تعریف شود، با فرض  $(I^0)^{observed} = (O^0)^{computed}$  مقدار  $S^0$  و  $(S^0)'$  با روابط زیر محاسبه خواهند شد. (رابطه ۱۱)

$$S^0 = K [XI^0 + (1-X)O^0]$$

$$(S^0)' = \frac{dS}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{S^1 - S^0}{\Delta t} = I^0 - O^0 \xrightarrow{O^0=I^0} (S^0)' = 0 \Rightarrow S^1 = S^0$$

برای روندیابی (شبیه‌سازی) توسط مدل ماسکینگام خطی مرتبه کسری از روند زیر استفاده شده است:

فرض مقادیر  $k$  و  $x$  و  $\alpha$  محاسبه مقادیر اولیه  $S^0$  برای شرایط  $0 < \alpha < 1$  و محاسبه  $S^0$  و  $S^1$  برای شرایط  $1 < \alpha < 2$  با استفاده از رابطه (۱۱)

محاسبه  $S^i$  برای هر گام زمانی  $t_i$  با استفاده از رابطه (۱۰) محاسبه  $O^i$  برای هر گام زمانی  $t_i$  با استفاده از رابطه (۳) در مرحله واسنجی این روند به ازای مقادیر مختلف  $k$  و  $x$  و  $\alpha$  تا زمانی که بهترین انطباق بین دبی خروجی محاسباتی و مشاهداتی حاصل شود، تکرار می‌شود. تابع هدف برای برآورد مقادیر بهینه پارامترهای روندیابی  $x$ ،  $k$  و  $\alpha$  به صورت حداقل کردن مجموع مربعات باقیمانده‌ها بین مقادیر مشاهداتی و محاسباتی هیدروگراف خروجی با استفاده از ابزار solver اکسل در نظر گرفته شده است که به صورت زیر بیان می‌گردد. (رابطه ۱۲)

$$SSQ = \sum_{i=0}^n \left[ (O^i)^{observed} - (O^i)^{computed} \right]^2$$

در این رابطه  $(O^i)^{observed}$  و  $(O^i)^{computed}$  به ترتیب مقادیر دبی مشاهداتی و دبی روندیابی شده در هر گام زمانی  $n+1$  تعداد کل داده‌ها می‌باشد. همچنین برای مقایسه و ارزیابی نتایج از معیار متوسط درصد خطای نسبی نیز به شرح زیر استفاده شده است. (رابطه ۱۳)

$$E(\%) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \left( \frac{|(O^i)^{observed} - (O^i)^{computed}|}{(O^i)^{observed}} \right) \times 100$$

(۶)

در این رابطه  $\alpha$  مرتبه غیر صحیح مشتق تابع  $f(t)$ ،  $m$  نزدیک‌ترین عدد صحیح به  $\alpha$  و  $\Gamma$  تابع گاما است. این معادله برای حل نیازمند  $m$  شرط اولیه می‌باشد. با به کار بردن مشتق کسری کاپوتو برای معادله دیفرانسیل ماسکینگام خطی، رابطه (۴) به صورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^\alpha S}{dt^\alpha} = \frac{I^i - \left( \frac{S^i}{k} \right)}{1-x}$$

(رابطه ۷)

این معادله یک معادله دیفرانسیل از مرتبه دلخواه  $\alpha$  است که یک تعریف عمومی از معادله (۴) می‌باشد به طوری که اگر  $\alpha$  برابر یک در نظر گرفته شود معادله (۷) به معادله (۴) تبدیل می‌شود. با توجه به اینکه مرتبه مشتق معادله حاکم برابر یک است در این تحقیق نیز مقدار  $\alpha$  در همسایگی یک مورد بررسی قرار گرفته است ( $0 < \alpha < 2$ ). به این منظور با توجه به تعریف مشتق کاپوتو (رابطه ۶)، برای  $0 < \alpha < 1$  و  $1 < \alpha < 2$  دو تعریف متفاوت زیر حاصل می‌شود: (رابطه ۸)

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{df(x)}{dx} (t-x)^{-\alpha} dx & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{d^2 f(x)}{dx^2} (t-x)^{1-\alpha} dx & 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

با فرض  $t_i = i\Delta t$  و با استفاده از روش‌های حل عددی انتگرال، می‌توان روابط زیر را استخراج کرد: (رابطه ۹)

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} \Big|_{t=t_i} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j^{(\alpha)} (f^{i-j} - f^{i-j-1}) & 0 < \alpha < 1 \\ \omega_j^{(\alpha)} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] & \\ \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j^{(\alpha)} (f^{i-j} - 2f^{i-j-1} + f^{i-j-2}) & 1 < \alpha < 2 \\ \omega_j^{(\alpha)} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] & \end{cases}$$

با استفاده از رابطه (۹)، معادله دیفرانسیل مرتبه کسری ذخیره (معادله ۷) به صورت زیر بیان می‌گردد: (رابطه ۱۰)

$$\begin{cases} \frac{I^{i-1} - \left( \frac{S^{i-1}}{k} \right)}{1-x} = \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j^{(\alpha)} (S^{i-j} - S^{i-j-1}) & 0 < \alpha < 1 \\ \omega_j^{(\alpha)} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] & \\ \frac{I^{i-1} - \left( \frac{S^{i-1}}{k} \right)}{1-x} = \sum_{j=0}^{i-1} \omega_j^{(\alpha)} (S^{i-j} - 2S^{i-j-1} + S^{i-j-2}) & 1 < \alpha < 2 \\ \omega_j^{(\alpha)} = \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] & \end{cases}$$

مثال‌های کاربردی

در این تحقیق مدل ماسکینگام خطی مرتبه کسری، برای داده‌های شاخص که قبلاً توسط محققین مختلف استفاده شده است، به کار برده شده است. مقدار بهینه پارامترهای روندیابی و مرتبه مشتق کسری  $\alpha$  با استفاده از تابع هدف SSQ برای هر مثال محاسبه شده است. برای یک ارزیابی صحیح از مدل جدید پیشنهادی، این مثال‌ها از سه گروه متفاوت؛ داده‌هایی با رفتار غیرخطی، رفتار غیرخطی ضعیف و رفتار خطی انتخاب شده است که در ادامه به بررسی آن‌ها پرداخته می‌شود.

در مثال اول از داده‌های Wilson (1974) استفاده شده است. این مثال به عنوان داده‌هایی با رفتار غیرخطی شناخته می‌شود و توسط بسیاری از محققین برای بررسی انواع مدل‌های روندیابی ماسکینگام استفاده شده است (Vatankhah, 2014; Easa, 2014; Barati, 2013). در مثال دوم از داده‌های ارائه شده توسط Brutsaert (2005) استفاده شده است. این مثال به عنوان داده‌هایی با رفتار غیرخطی ضعیف شناخته می‌شود و در مثال سوم از داده‌های ارائه شده توسط Ramirez (2010) استفاده شده است که به عنوان داده‌هایی با رفتار خطی شناخته می‌شود.

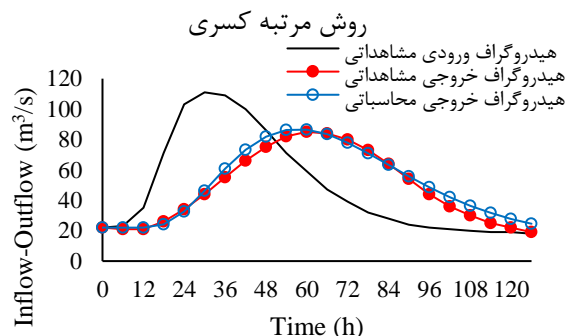
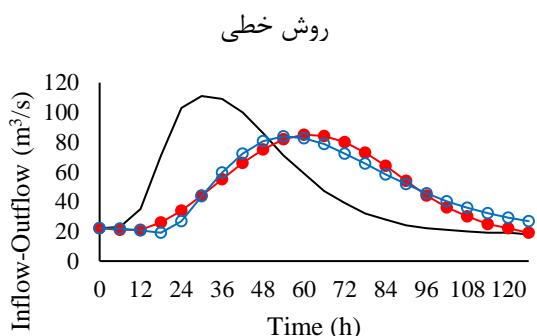
نتایج و بحث

در جدول (۱) داده‌های مثال اول (داده‌های غیرخطی) و همچنین نتایج به دست آمده از روش ماسکینگام خطی معمولی (با روش حل اویلر) و نتایج مدل ماسکینگام مرتبه کسری برای این مثال ارائه شده است. هیدروگراف مشاهداتی و محاسباتی برای ماسکینگام خطی و مرتبه کسری در شکل (۱) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج روش مرتبه کسری نسبت به روش خطی انطباق بهتری با مقادیر دبی خروجی مشاهداتی دارد. میزان انطباق نتایج را می‌توان بر اساس مقادیر شاخص SSQ تحلیل کرد. مقدار SSQ برای روش خطی ۶۰۵/۶۳ بوده که با استفاده از روش مرتبه کسری این مقدار به ۳۸۰/۷۶

کاهش یافته است. مقدار بهینه مرتبه کسری  $\alpha$  در این شرایط ۱/۱۵۳ می‌باشد. لازم به ذکر است به ازای  $\alpha$ های مختلف (مرتبه مشتق کسری) رفتارهای متفاوتی از هیدروگراف خروجی محاسباتی وجود دارد که برای  $\alpha$  بهینه؛ رفتار هیدروگراف خروجی محاسباتی مطابق جدول (۱) و شکل (۱) می‌باشد.

جدول ۱- داده‌های Wilson (1974) و نتایج روندیابی با روش ماسکینگام خطی و مرتبه کسری

مقادیر مشاهداتی	دبی محاسباتی (m <sup>3</sup> /s)		ماسکینگام مرتبه کسری	ماسکینگام مرتبه کسری
	دبی ورودی (m <sup>3</sup> /s)	دبی خروجی (m <sup>3</sup> /s)		
۰	۲۲	۲۲	۲۲/۰۰	۲۲/۰۰
۶	۲۳	۲۱	۲۱/۸۷	۲۲/۰۰
۱۲	۳۵	۲۱	۲۰/۵۲	۲۲/۱۲
۱۸	۷۱	۲۶	۱۹/۰۷	۲۴/۲۱
۲۴	۱۰۳	۳۴	۲۶/۹۰	۳۲/۵۱
۳۰	۱۱۱	۴۴	۴۳/۵۸	۴۶/۳۰
۳۶	۱۰۹	۵۵	۵۹/۵۸	۶۰/۷۱
۴۲	۱۰۰	۶۶	۷۲/۳۲	۷۳/۰۹
۴۸	۸۶	۷۵	۸۰/۶۵	۸۱/۸۹
۵۴	۷۱	۸۲	۸۳/۹۱	۸۶/۲۹
۶۰	۵۹	۸۵	۸۲/۵۱	۸۶/۴۵
۶۶	۴۷	۸۴	۷۸/۶۳	۸۳/۴۴
۷۲	۳۹	۸۰	۷۲/۳۲	۷۷/۸۶
۷۸	۳۲	۷۳	۶۵/۴۹	۷۰/۹۴
۸۴	۲۸	۶۴	۵۸/۲۱	۶۳/۲۹
۹۰	۲۴	۵۴	۵۱/۷۰	۵۵/۷۴
۹۶	۲۲	۴۴	۴۵/۵۰	۴۸/۴۹
۱۰۲	۲۱	۳۶	۴۰/۱۵	۴۱/۹۷
۱۰۸	۲۰	۳۰	۳۵/۸۲	۳۶/۳۸
۱۱۴	۱۹	۲۵	۳۲/۲۶	۳۱/۶۵
۱۲۰	۱۹	۲۲	۲۹/۱۷	۲۷/۷۰
۱۲۶	۱۸	۱۹	۲۶/۹۳	۲۴/۵۸



شکل ۱- هیدروگراف مشاهداتی و محاسباتی برای ماسکینگام خطی و مرتبه کسری (مثال اول)

خطی دارد مقدار  $\alpha$  بسیار نزدیک به ۱ ( $0.9996 \approx 1$ ) حاصل شده است.

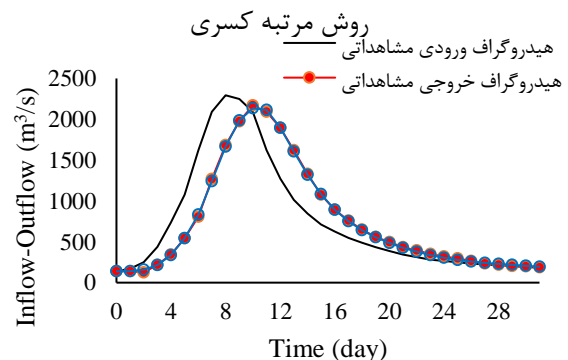
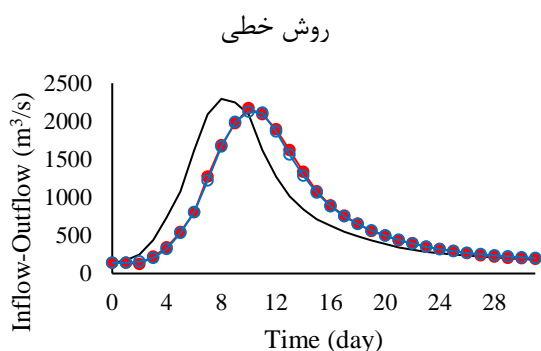
جدول ۲- داده‌های (Brutsaert (2005) و نتایج روندیابی با روش ماسکینگام خطی و مرتبه کسری

زمان (day)	مقادیر مشاهداتی		دبی محاسباتی (m <sup>3</sup> /s)	
	دبی ورودی (m <sup>3</sup> /s)	دبی خروجی (m <sup>3</sup> /s)	ماسکینگام خطی	ماسکینگام مرتبه کسری
۰	۱۳۹	۱۳۹	۱۳۹/۰۰	۱۳۹/۰۰
۱	۱۷۲	۱۳۹	۱۳۸/۶۱	۱۴۱/۳۱
۲	۲۵۰	۱۲۴	۱۵۴/۸۴	۱۶۰/۳۲
۳	۴۳۸	۲۲۰	۲۰۱/۵۱	۲۱۴/۰۳
۴	۷۳۶	۳۴۲	۳۱۹/۵۲	۳۳۶/۹۸
۵	۱۰۷۷	۵۴۲	۵۲۹/۵۴	۵۴۵/۴۳
۶	۱۶۲۲	۸۰۵	۸۰۴/۴۵	۸۳۴/۵۲
۷	۲۰۹۰	۱۲۷۰	۱۲۱۹/۱۲	۱۲۳۹/۳۵
۸	۲۲۹۴	۱۶۸۴	۱۶۶۴/۳۵	۱۶۶۶/۰۱
۹	۲۲۴۷	۱۹۷۳	۱۹۸۸/۵۸	۱۹۸۵/۳۲
۱۰	۲۰۹۰	۲۱۶۹	۲۱۲۳/۲۹	۲۱۳۳/۹۲
۱۱	۱۶۲۲	۲۰۹۰	۲۱۱۱/۷۶	۲۱۱۶/۰۲
۱۲	۱۲۷۱	۱۸۹۵	۱۸۶۴/۱۹	۱۸۹۵/۰۴
۱۳	۱۰۱۵	۱۶۲۲	۱۵۶۲/۳۲	۱۶۰۴/۰۴
۱۴	۸۴۴	۱۳۳۳	۱۲۸۳/۰۲	۱۳۲۱/۲۶
۱۵	۷۱۱	۱۰۷۷	۱۰۵۸/۹۳	۱۰۸۳/۷۰
۱۶	۶۲۷	۸۹۱	۸۸۱/۰۸	۸۹۳/۸۷
۱۷	۵۴۹	۷۵۹	۷۵۱/۴۱	۷۵۱/۶۱
۱۸	۴۸۸	۶۵۱	۶۴۸/۰۹	۶۴۰/۹۵
۱۹	۴۳۳	۵۵۸	۵۶۶/۴۵	۵۵۴/۵۹
۲۰	۳۸۸	۴۹۶	۴۹۸/۳۹	۴۸۴/۶۸
۲۱	۳۴۳	۴۳۴	۴۴۲/۱۸	۴۲۷/۳۳
۲۲	۳۱۳	۳۹۶	۳۹۱/۵۶	۳۷۷/۸۴
۲۳	۲۸۳	۳۵۰	۳۵۱/۵۳	۳۳۷/۹۴
۲۴	۲۶۶	۳۱۹	۳۱۶/۵۱	۳۰۴/۴۰
۲۵	۲۴۹	۲۹۶	۲۹۰/۷۵	۲۷۹/۰۰
۲۶	۲۳۶	۲۶۵	۲۶۹/۴۴	۲۵۸/۵۶
۲۷	۲۲۴	۲۳۵	۲۵۲/۴۰	۲۴۲/۲۵
۲۸	۲۱۳	۲۲۰	۲۳۷/۹۳	۲۲۸/۶۰
۲۹	۲۰۱	۲۰۴	۲۲۵/۲۶	۲۱۶/۶۰
۳۰	۱۹۲	۱۹۷	۲۱۲/۹۰	۲۰۵/۲۵
۳۱	۱۸۲	۱۸۹	۲۰۲/۲۷	۱۹۵/۱۸

در جدول (۲) نتایج روندیابی سیلاب با روش ماسکینگام خطی و مرتبه کسری برای مثال دوم (داده‌های غیرخطی ضعیف) ارائه شده است. هیدروگراف مشاهداتی و محاسباتی نیز برای ماسکینگام خطی و مرتبه کسری در شکل (۲) نشان داده شده است. در مثال دوم مقدار شاخص SSQ با روش ماسکینگام خطی برابر ۱۶۹۵۸/۵۸ بوده و با استفاده از روش مرتبه کسری مقدار آن به ۷۸۵۵/۶۴ کاهش یافته است. مقدار بهینه مرتبه  $\alpha$  در این شرایط ۱/۰۵ می‌باشد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، برای داده‌های با رفتار غیرخطی ضعیف، مقدار بهینه  $\alpha$  به مقدار ۱ نزدیک‌تر شده است.

مشابه با مثال‌های قبلی، نتایج روندیابی سیلاب با روش ماسکینگام خطی و مرتبه کسری برای مثال سوم (داده‌های خطی) در جدول (۳) ارائه شده است. هیدروگراف مشاهداتی و محاسباتی برای این مثال در شکل (۳) نشان داده شده است. مقدار SSQ در مثال سوم با روش خطی برابر ۲/۱۵ بوده و با استفاده از روش مرتبه کسری مقدار آن ۲/۱۴ می‌باشد. مقدار بهینه مرتبه  $\alpha$  در این شرایط برابر ۱ تعیین گردید. با توجه به اینکه داده‌های این مثال رفتار ذاتاً خطی دارند، ملاحظه می‌شود که مقادیر شاخص SSQ در دو حالت مرتبه کسری و خطی تقریباً برابر هستند، همچنین این رفتار خطی در مقدار  $\alpha$  هم نمود پیدا کرده و مقدار بهینه آن برابر ۱ محاسبه شده است.

در جدول (۴) مقادیر بهینه پارامترهای روندیابی،  $\alpha$  و SSQ و مقدار متوسط درصد خطای نسبی (E%) برای هر سه مثال ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در همه موارد مقدار SSQ و خطای نسبی در روش مرتبه کسری نسبت به روش خطی کاهش یافته است. همچنین در مثال اول که نسبت به مثال دوم و سوم خاصیت غیرخطی بیشتری دارد مقدار  $\alpha$  در حالت کسری تفاوت بیشتری از مقدار یک دارد و در مثال سوم که خاصیت



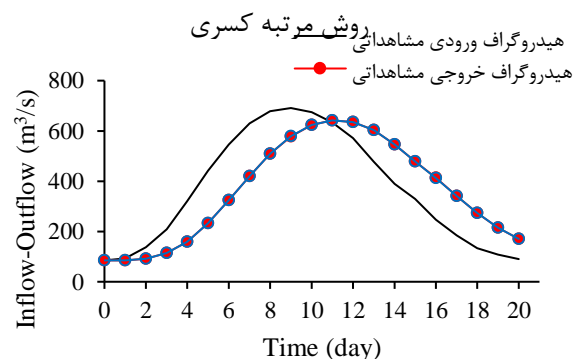
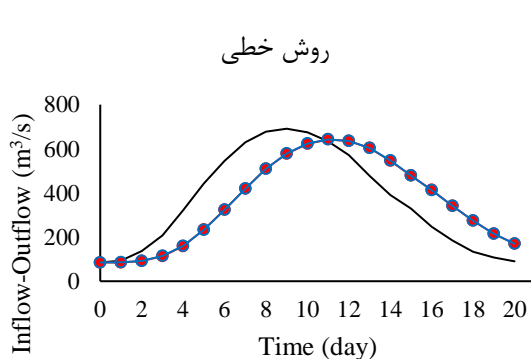
شکل ۲- هیدروگراف مشاهداتی و محاسباتی برای ماسکینگام خطی و مرتبه کسری (مثال دوم)

جدول ۳- داده‌های Ramirez (2010) و نتایج روندیابی با روش ماسکینگام خطی و مرتبه کسری

مقادیر مشاهداتی			دبی محاسباتی (m <sup>3</sup> /s)	
زمان (h)	دبی ورودی (m <sup>3</sup> /s)	دبی خروجی (m <sup>3</sup> /s)	ماسکینگام خطی	ماسکینگام مرتبه کسری
۰	۸۵	۸۵	۸۵/۰۰	۸۵/۰۰
۱	۹۳	۸۵	۸۵/۴۹	۸۵/۴۹
۲	۱۳۷	۹۱	۹۱/۲۵	۹۱/۲۳
۳	۲۰۸	۱۱۴	۱۱۴/۲۷	۱۱۴/۲۴
۴	۳۲۰	۱۵۹	۱۵۹/۳۸	۱۵۹/۳۳
۵	۴۴۲	۲۳۳	۲۳۳/۴۰	۲۳۳/۳۵
۶	۵۴۶	۳۲۴	۳۲۴/۳۰	۳۲۴/۲۷
۷	۶۳۰	۴۲۰	۴۱۹/۹۱	۴۱۹/۸۹
۸	۶۷۸	۵۰۹	۵۰۸/۵۸	۵۰۸/۵۷
۹	۶۹۱	۵۷۸	۵۷۸/۵۱	۵۷۸/۵۰
۱۰	۶۷۵	۶۲۳	۶۲۳/۴۳	۶۲۳/۴۲
۱۱	۶۳۴	۶۴۲	۶۴۱/۹۶	۶۴۱/۹۵
۱۲	۵۷۱	۶۳۵	۶۳۴/۸۵	۶۳۴/۸۳
۱۳	۴۷۷	۶۰۳	۶۰۳/۰۴	۶۰۳/۰۲
۱۴	۳۹۰	۵۴۶	۵۴۶/۲۸	۵۴۶/۲۴
۱۵	۳۲۹	۴۷۹	۴۷۸/۷۷	۴۷۸/۷۲
۱۶	۲۴۷	۴۱۳	۴۱۲/۶۳	۴۱۲/۶۰
۱۷	۱۸۴	۳۴۱	۳۴۱/۱۸	۳۴۱/۱۵
۱۸	۱۳۴	۲۷۴	۲۷۳/۹۸	۲۷۳/۹۵
۱۹	۱۰۸	۲۱۵	۲۱۵/۲۷	۲۱۵/۲۴
۲۰	۹۰	۱۷۰	۱۷۰/۳۹	۱۷۰/۳۸

جدول ۴- مقدار بهینه پارامترهای روندیابی،  $\alpha$  و  $SSQ$  و درصد خطای نسبی  $E\%$

مثال	روش	k	x	$\alpha$	SSQ	E%
۱	خطی	۲۹/۱۶۴۶	-۰/۱۱۸۲	۱	۶۰۵/۶۳۳۴	۱۱/۹۴۹۴
	مرتبه کسری	۴۴/۰۲۷۵	۰/۰۰۳۷	۱/۱۵۳۳	۳۸۰/۷۶۰۳	۹/۲۸۴۵
۲	خطی	۱/۹۶۸۶	-۰/۰۱۱۸	۱	۱۶۹۵۸/۵۷۹۴	۳/۱۲۶۵
	مرتبه کسری	۲/۰۶۱۷	-۰/۰۷۵۱	۱/۰۵۱۰	۷۸۵۵/۶۴۰۵	۲/۵۵۸۴
۳	خطی	۲/۳۰۰۵	-۰/۰۶۵۳	۱	۲/۱۵۲۶	۰/۱۲۲۸
	مرتبه کسری	۲/۲۹۹۳	-۰/۰۶۴۷	۰/۹۹۹۶	۲/۱۳۷۳	۰/۱۱۹۱



شکل ۳- هیدروگراف مشاهداتی و محاسباتی برای ماسکینگام خطی و مرتبه کسری (مثال سوم)

### نتیجه‌گیری

روش‌های حل معادله دیفرانسیل مرتبه یک می‌باشد که در مدل‌های روندیابی سیلاب با استفاده از روش ماسکینگام اغلب از آن استفاده می‌گردد. در تحقیقات پیشین برای لحاظ نمودن ویژگی

تاکنون روش‌های متعددی برای روندیابی سیلاب توسط محققین مختلف ارائه شده است. روش حل عددی اویلر یکی از ساده‌ترین



پارامترهای روندیابی و  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ ) برای مطالعات موردی مورد نظر بهینه گردید. مقایسه SSQ و خطای نسبی مقادیر محاسباتی روش مرتبه کسری و روش خطی معمولی با مقادیر مشاهداتی نشان داد که حالت کسری نسبت به روش خطی معمولی دارای عملکرد بهتری است و برای بهبود مدل‌های روندیابی ماسکینگام خطی می‌توان از آن استفاده کرد. مدل پیشنهادی اگر چه از معادله خطی ذخیره استفاده می‌کند اما از آنجایی که معادله دیفرانسیل آن به صورت مرتبه کسری است قادر است رفتار غیرخطی سیلاب‌ها را نیز به خوبی پیش‌بینی کند. این مدل همچنین در مواقعی که رفتار سیلاب خطی است به مدل خطی کاهش می‌یابد.

غیرخطی سیلاب از مدل ماسکینگام اصلاح شده با معادله ذخیره غیرخطی با مبنای تجربی استفاده شده است ولی در تحقیق حاضر ویژگی غیرخطی در معادله دیفرانسیل پیوستگی با استفاده از مشتق مرتبه کسری که دارای مبنای تئوری است لحاظ شده است. با توجه به خاصیت غیرموضعی مشتقات کسری، که از تمام داده‌های موجود در دامنه، برای محاسبه مشتق استفاده می‌کند، در این تحقیق برای بهبود دقت مدل روندیابی ماسکینگام خطی از تئوری مشتقات کسری استفاده گردید. به این منظور ابتدا معادلات ذخیره و پیوستگی در حالت کسری و در همسایگی عدد یک ( $0 < \alpha < 1$  و  $1 < \alpha < 2$ ) توسعه داده شد و سه مثال از داده‌های کاربرد در مطالعات روندیابی سیلاب از ادبیات موضوع انتخاب و مورد بررسی قرار گرفت. با هدف کمینه کردن SSQ

## REFERENCES

- Aldama, A. (1990). Least-Squares Parameter Estimation for Muskingum Flood Routing. *Journal of Hydraulic Engineering*, 116(4):580-586.
- Barati, R. (2013). Application of excel solver for parameter estimation of the nonlinear Muskingum models. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 17(5), 1139-1148.
- Brutsaert, W. (2005). Hydrology: An introduction. Cambridge University Press.
- Chaudhry, M. H. (2007). Open-channel flow. Springer Science and Business Media.
- Diskin, M. H. (1967). On the solution of the Muskingum flood routing equation. *Journal of Hydrology*, 5, 286-289.
- Easa, S. M. (2014a). Multi-criteria optimisation of the Muskingum flood model: a new approach. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Water Management*, 168(5), 220-231.
- Easa, S. M. (2014b). Closure to "Improved Nonlinear Muskingum Model with Variable 479 Exponent Parameter" by Said M. Easa. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19(10), 480 07014008.
- Easa, S. M. (2015). Evaluation of nonlinear Muskingum model with continuous and discontinuous exponent parameters. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 19(7), 2281-2290.
- Ercan, A. and Kavvas, M. L. (2017). Time-space fractional governing equations of one dimensional unsteady open channel flow process: Numerical solution and exploration. *Hydrological Processes*, 31(16), 2961-2971.
- Gelegenis, J. and Serrano, S.E. (2000). Analysis of Muskingum Equation Based Flood Routing Schemes. *Journal of Hydrologic Engineering*, 5(1):102-105.
- Gill, M. A. (1977). Routing of floods in river channels. *Hydrology Research*, 8(3), 163-170.
- Gill, M. A. (1979). Translatory characteristics of the Muskingum method of flood routing. *Journal of Hydrology*, 40(1-2), 17-29.
- Gill, M. A. (1989). Response of Muskingum equation to step input. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 115(4), 736-738.
- Gill, M. A. (1992). Numerical solution of Muskingum equation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 118(5), 804-809.
- Heggen, R. J. (1984). Univariate least squares Muskingum flood routing. *JAWRA Journal of the American Water Resources Association*, 20(1), 103-108.
- Huang, Q., Huang, G. and Zhan, H. (2008). A finite element solution for the fractional advection-dispersion equation. *Advances in Water Resources*, 31(12), 1578-1589.
- Kavvas, M. L. and Ercan, A. (2014). Fractional governing equations of diffusion wave and kinematic wave open-channel flow in fractional time-space. I. Development of the equations. *Journal of Hydrologic Engineering*, 20(9), 04014096.
- Kavvas, M. L. and Ercan, A. (2016). Time-Space Fractional Governing Equations of Unsteady Open Channel Flow. *Journal of Hydrologic Engineering*, 22(2), 04016052.
- Kilbas, A. A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). Elsevier Science Limited.
- McCarthy, G.T. (1938). The unit hydrograph and flood routing. *Conf. North Atlantic Division, U.S. Army Corps of Engineers*, New London, Conn.
- Moussa, R. and Bocquillon, C. (2001). Fractional-step method solution of diffusive wave equation. *Journal of Hydrologic Engineering*, 6(1), 11-19.
- Nash, J. E. (1959). A note on the Muskingum flood-routing method. *Journal of geophysical research*, 64(8), 1053-1056.
- O'Donnell, T. (1985). A direct three-parameter Muskingum procedure incorporating lateral inflow. *Hydrological Sciences Journal*, 30(4), 479-496.
- Ouyang, A., Li, K., Truong, T. K., Sallam, A. and Sha,

- E. H. M. (2014). Hybrid particle swarm optimization for parameter estimation of Muskingum model. *Neural Computing and Applications*, 25(7-8), 1785-1799.
- Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, vol. 198. *Mathematics in Science and Engineering*.
- Ramirez, J. A. (2010). Colonel State University classes. Retrieved February 3, 2019, from [http://www.engr.colostate.edu/~ramirez/ce\\_old/classes](http://www.engr.colostate.edu/~ramirez/ce_old/classes).
- Sing, V.P and Scarlatos, P.D. (1989). Analysis of Nonlinear Muskingum Flood Routing. *Journal Of Hydraulic Engineering*, 113(1):61-79.
- Vatankhah, A. R. (2014). Evaluation of explicit numerical solution methods of the Muskingum model. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19(8), 06014001.
- Wilson, E. M., (1974). *Engineering Hydrology*. Macmillan, London.