DOI: 10.22059/ijswr.2019.289571.668328 تحقیقات آب و خاک ایران، دوره ۵۱، شماره ۳، خرداد ۱۳۹۹ (ص ۷۲۶-۷۱۳)

Application of the Quasi-Reversibility Method in Inverse Computation of Temporal and Spatial Pollutant Concentration in Time

MOHAMMAD LOUSHABI[1], MEHDI MAZAHERI[*1], JAMAL MOHAMMDVALI SAMANI[1]
1. Departement of Water Structures, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran
(Received: Oct. 6, 2019- Revised: Nov. 15, 2019- Accepted: Nov. 30, 2019)

ABSTRACT

Pollutants are usually drained off imperceptibly and suddenly in the rivers, which can be of human or natural origin, thus finding information from contaminant source as quickly as possible is important to reduce damage. The pollutant is released by the Advection-Dispersion processes in the river. Therefore, information on contaminant release site and release time can be obtained using inverse solution of the Advection-Dispersion equation. The purpose of this study is to solve Advection-Dispersion Equation (ADE) reversely and to obtain information on the release time and time series data of pollutant concentration discharged into the studied rivers. In this research, the quasi-reversibility method is used to reverse the ADE. In this method, by adding the stability term (fourth derivative term) to ADE, the mentioned relationship can be solved reversely without the instability of the answers. A hypothetical example and a case study of Karun River have been used for model validation. The aforementioned method determines the concentration experienced at different points and intervals of the river by reversing the ADE. The highest contaminant intake in each interval, maximum and average intake time are the obtained results by this method. The results show that the quasi-reversibility method has been performed with high accuracy and the proposed method has been satisfied in stability of solving ADE.

Keywords: Advection-Dispersion equation, Inverse solution, Stability term, pollution concentration.

* Corresponding Author's Email: m.mazaheri@modares.ac.ir

کاربرد روش شبه‌معکوس‌پذیری در تعیین توزیع زمانی و مکانی غلظت آلاینده به‌صورت معکوس در زمان

محمد لوشابی[۱]، مهدی مظاهری[۱*]، جمال محمدعلی سامانی[۱]

۱. گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۷/۱۴- تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۸/۲۴- تاریخ تصویب: ۱۳۹۸/۹/۹)

چکیده

آلاینده‌ها معمولاً به‌صورت نامحسوس و ناگهانی در رودخانه‌ها تخلیه می‌شوند که می‌تواند منشأ انسانی و یا طبیعی داشته باشد، لذا یافتن هر چه سریع‌تر اطلاعاتی از منبع آلاینده برای کاهش خسارات بسیار حائز اهمیت است. آلاینده توسط فرآیندهای جابه‌جایی-پراکندگی در رودخانه انتشار پیدا می‌کند. پس می‌توان با استفاده از حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی اطلاعاتی از محل و یا زمان انتشار آلاینده به‌دست آورد. هدف از انجام این تحقیق حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی و به‌دست آوردن اطلاعاتی از زمان انتشار و داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده تخلیه‌شده در رودخانه‌های موردمطالعه است. در این تحقیق برای حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی از روش شبه‌معکوس‌پذیری استفاده شده که در این روش با اضافه کردن ترم پایداری (ترم مشتق چهارم) به رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی می‌توان رابطه‌ی مذکور را به‌صورت معکوس بدون ناپایدار شدن پاسخ‌ها حل نمود. برای صحت‌سنجی مدل از یک مثال فرضی و مطالعه موردی بازه‌ای از رودخانه کارون بهره برده شده است. روش مذکور با حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی که موجب گسترش آلودگی در رودخانه می‌شود، غلظت تجربه‌شده در نقاط و بازه‌های مختلف رودخانه را تعیین می‌نماید. بیش‌ترین غلظت آلاینده دریافتی هر بازه، زمان دریافت غلظت بیشینه و متوسط غلظت دریافتی هر بازه از نتایج این روش است. نتایج حاکی از آن است که پس‌بینی مدل شبه‌معکوس‌پذیری با دقت بالایی انجام گرفته و روش مذکور در پایداری حل معکوس معادله جابه‌جایی-پراکندگی موفق عمل نموده است.

واژه‌های کلیدی: ترم پایداری، حل معکوس، غلظت آلاینده، رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی.

مقدمه

آلاینده‌ها یا به‌صورت قانونی و یا به‌صورت غیرقانونی در رودخانه‌ها تخلیه می‌گردند که در هر دو مورد دانستن غلظت آلاینده در نقاط مختلف رودخانه و در زمان‌های مختلف مسئله مهمی محسوب می‌گردد. این امر به دو روش کلی انجام‌پذیر است؛ روش اول، برداشت داده‌های غلظت آلاینده به‌صورت سری زمانی در همه نقاط رودخانه با فواصل مکانی کم که امری پرهزینه و حتی غیرکاربردی است. روش دوم استفاده از مدل‌های ریاضی است که هزینه و زمان به‌مراتب کم‌تری نیاز دارد. رودخانه‌ها به‌عنوان در دسترس‌ترین منبع برای تخلیه پساب‌ها و فاضلاب‌های صنعتی در معرض آلودگی قرار دارند. منظور از آلودگی آب، آلودگی شیمیایی، آلودگی میکروبی، آلودگی با مواد زائد آب دریاچه‌ها، رودخانه‌ها و آب‌های زیرزمینی است. در تعریفی کلی، آلودگی آب عبارت است از «تغییر مواد محلول، معلق و یا تغییر درجه حرارت و دیگر خواص فیزیکی و یا بیولوژیکی آب، در حدی که آن را برای مصرف موردنظر، مضر یا غیرمفید سازد» (Chapra, 1997). هرچند مقرراتی در جهت محدود کردن صنایع در رهاسازی آلاینده به رودخانه‌ها وجود دارد، اما وجود چنین مقرراتی به‌تنهایی راهکار حل مشکل نبوده و باز هم متخلفانی هستند که آلاینده خود را به‌صورت غیرقانونی وارد رودخانه می‌نمایند.

بر اساس گزارش اداره حفاظت محیط‌زیست ایالات‌متحده، ۲۰ درصد آلاینده‌های موجود در منابع آبی در این کشور از یک منبع ناشناخته وارد شده است (Tong and Deng, 2015). این در حالی است که آمار در کشورهای درحال‌توسعه می‌تواند بسیار نگران‌کننده‌تر باشد. بنابراین یافتن هر چه سریع‌تر اطلاعاتی از آلاینده رهاسازی شده می‌تواند مؤثر در جهت کاهش آلودگی و به حداقل رساندن خسارات را در پی داشته باشد (Neupauer *et al.*, 2000)، از این رو مسائل معکوس می‌تواند کمک شایانی به یافتن هرچه سریع‌تر و دقیق‌تر منابع آلاینده انجام دهد (Wilson and Liu, 1994). پس می‌توان با استفاده از روش‌های حل معکوس اطلاعاتی کاربردی از منبع آلاینده رهاشده و تاریخچه غلظت آلاینده رهاشده به‌دست آورد (Zhang and Chen, 2007) که می‌تواند در مدیریت و اطلاع‌رسانی همگانی مؤثر واقع گردد، چنانچه بتوان با برداشت داده غلظت آلاینده در یک نقطه از

* نویسنده مسئول: m.mazaheri@modares.ac.ir

رودخانه، بیان نمود که در نقاط مختلف رودخانه چه غلظتی از آلاینده موجود را تجربه کرده‌اند، مدیریت برداشت منابع آبی می‌تواند برنامه‌ریزی بهتر و با ثبات بیش‌تری داشته باشد. مطالعه مسائل معکوس بر روی معادلات مختلف به‌خصوص معادلات دیفرانسیل جزئی و اخذ نتایج، علاقه بسیاری از محققان علم ریاضیات و مهندسی بوده است. یک مسئله معکوس ممکن است با موارد «عدم وجود جواب»، «عدم یکتایی نتایج»، «عدم پایداری پاسخ‌ها» و یا ترکیبی از آن‌ها مواجه باشد (Atmadja and Bagtzoglou, 2001).

در این قسمت به مروری بر تحقیقات انجام‌گرفته در زمینه‌ی حل معکوس معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم با استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری با تمرکز بر حل معکوس معادلات پخشیدگی و گرما پرداخته می‌گردد.

معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم، معادلاتی هستند که به‌صورت معمول و با روش‌های متداول قابل حل نمی‌باشند و پاسخ‌های این‌گونه معادلات واگرا شده و به پاسخ صحیحی نخواهد رسید، پس باید روشی ارائه شود تا بتوان این نوع معادلات را حل نمود، روش شبه‌معکوس‌پذیری روشی است برای حل معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم و در این روش با استفاده از ترم پایداری مشتق چهار از درجه بدخیمی رابطه‌ی کاسته و باعث همگرایی پاسخ‌های رابطه‌ی دیفرانسیلی می‌گردد (Lattes and Lions, 1969).

(Quasi reversibility) QR (Lattes and Lions, 1969) را برای حل معکوس رابطه‌ی پخشیدگی ارائه دادند، هدف روش QR حل معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم می‌باشد. استراتژی کلی روش شبه‌معکوس‌پذیری، حل رابطه‌ی غیرمعکوس‌پذیر و جایگذاری و حل رابطه‌ای نزدیک به رابطه‌ی اصلی می‌باشد. لاتس و لیون (Lattes and Lions, 1969) رابطه‌ی پخشیدگی را با زمان معکوس توسط جایگزینی پارامتر پخشیدگی $\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ با پارامتر QR، $\varepsilon\Delta^2 - \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$ که ε ثابت مثبت کوچک و Δ پایه‌ای برای رابطه‌ی لاپلاس است، حل نمودند.

Dorroh و Ru (1998) روش شبه‌معکوس‌پذیری را برای حل معکوس رابطه‌ی هدایت گرما که رابطه‌ای دیفرانسیلی جزئی بدخیم است ارائه دادند و با قرار دادن محدودیتی در شرایط مرزی ثابت کردند اگر شرایط مرزی محدودشده به‌اندازه کافی دقیق باشد، حل برگشتی توسط روش شبه‌معکوس‌پذیری دقیق می‌باشد.

Ismail-Zadeh *et al* (2006) رابطه‌ی همرفت گرما را در حالت سه‌بعدی با استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری، به‌صورت معکوس حل نمودند، که روش مذکور باعث پایداری پاسخ‌های برگشتی رابطه‌ی همرفت گرما شده و به همگرایی لازم رساند.

Qian و Mao (2011) پیشنهاد روش شبه‌معکوس‌پذیری را برای حل برگشتی رابطه‌ی هدایت گرما که رابطه‌ی دیفرانسیلی بدخیم است ارائه دادند و پارامتر تنظیم در روش شبه‌معکوس‌پذیری را با استفاده از خطاهای مختلف مورد آزمون قرار دادند. نتایج حاکی از آن است که روش شبه‌معکوس‌پذیری کاملاً مؤثر در حل رابطه‌ی برگشتی هدایت گرما است.

Yang و Liu (2014) برای شناسایی منبع ناشناخته با استفاده از حل معکوس رابطه‌ی پخشیدگی ذرات از روش QR استفاده نمود. در مسائل معکوس، تغییر کوچکی در داده‌های اندازه‌گیری شده بسیار بر حل آن‌ها تأثیرگذار است. روش منظم شبه‌معکوس‌پذیری برای حل این نوع مسائل به‌کاربرده شده است، به این ترتیب نتایج عددی نشان دادند روش منظم شبه‌معکوس‌پذیری مؤثر و پایدار است.

در این قسمت به مروری بر تحقیقات انجام‌گرفته در زمینه‌ی حل معکوس معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم با استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری و دیگر روش‌ها با تمرکز بر حل معکوس رابطه‌ی انتقال جرم پرداخته می‌گردد.

آلاینده رهاسازی شده در رودخانه توسط فرآیندهای جابه‌جایی-پراکندگی انتشار پیدا می‌کند، پس برای یافتن نوع الگوی بارگذاری غلظت و همچنین زمان بارگذاری آلاینده، نیاز به حل رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی با گام‌های زمانی منفی است، که رابطه‌ی دیفرانسیلی جزئی بدخیم را ایجاد خواهد کرد (Atmadja and Bagtzoglou, 2001).

یک راه‌حل برای پایداری پاسخ‌های رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی با ضرایب ثابت، به‌صورت معکوس، روش QR با جایگذاری ترم پایداری مشتق چهارم است (Zhang *et al*., 2011).

Skaggs و Kabala (1995) بازسازی زمان رهاسازی آلاینده در آب‌های زیرزمینی را با روش شبه‌معکوس‌پذیری، بررسی کردند، که در این تحقیق رابطه‌ی پخشیدگی را به رابطه‌ی جابه جایی-پراکندگی با حل پارامتر پخشیدگی روش شبه معکوس‌پذیری در یک سیستم مختصات متحرک توسعه دادند که در نتیجه‌گیری کلی اعلام شد که روش شبه معکوس‌پذیری برای حل رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی به‌صورت معکوس زمانی با ضرایب متغیر کارآمد است.

Dorroh و Ru (1998) اثبات نمودند با تعیین محدودیت‌های خاصی در شرایط مرزی رابطه‌ی گرما، می‌توان پاسخ‌های دقیق‌تری دست پیدا نمود.

Atmadja and Bagtzoglou (2001) مقایسه‌ای بین روش

رابطه‌ی Marching-Jury معکوس و شبه‌معکوس‌پذیری برای معکوس هیدرولوژیکی و به‌طور خاص برای بازسازی توزیع مکانی توده آلاینده ارائه دادند، که روش شبه‌معکوس‌پذیری در مواردی که محیط متخلخل ناهمگن باشد، ضعیف عمل کرده اما در مواردی که پارامترها همگن و داده‌های اولیه دارای عدم قطعیت هستند، بسیار کارآمد است.

Bagtzoglou and Atmadja (2003) رویکرد روش QR دارای الگوریتمی غیر تکرارشونده است و فقط با یک‌بار پیاده‌سازی در روش عددی برای رابطه‌ی دیفرانسیلی جزئی به این صورت که مجهولات مسئله را به‌صورت معین و بدون تکرار، به‌دست می‌آورد (Bagtzoglou, 1992). روش مذکور در حل رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی به‌صورت معکوس زمانی، در مواقعی که آلودگی غالب بر جریان است عملکرد ضعیفی دارد (Bagtzoglou and Atmadja, 2003).

روش QR در تحقیق انجام‌گرفته توسط (Xiong *et al.*, 2006) بسیار به برداشت دقیق داده‌های اندازه‌گیری (شرایط انتهایی) حساس است.

Bagtzoglou and Atmadja (2003) در نتایج خود نشان دادند که ترم پراکندگی بر دقت پاسخ‌های حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی با روش QR بسیار مؤثر است.

روش شبه‌معکوس‌پذیری با اضافه نمودن ترم پایدارکننده مشتق چهارم به رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی، باعث پایداری پاسخ‌های رابطه‌ی مذکور در گام‌های زمانی منفی می‌گردد (Skaggs and Kabala, 1995) و می‌توان رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی را در اصطلاح به‌صورت معکوس حل و داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده رهاشده در رودخانه و همچنین زمان رهاسازی را بازسازی نمود، که در ترم پایداری، ضریب پایداری نقش اصلی را دارد (Denche and Bessila, 2005 و Lattes and Lions, 1969). مشخص است ساده‌سازی در معادلات جریان شناسایی منبع آلاینده را در رودخانه آسان‌تر و بلعکس عدم ساده‌سازی در معادلات مذکور شناسایی منبع آلاینده را دشوارتر می‌نماید (Ghane *et al.*, 2016 و Mazaheri *et al.*, 2015).

(Ghane *et al.*, 2016) روش احتمال برگشتی برای شناسایی منبع آلودگی در آب‌های زیرزمینی، را در شناسایی محل منبع آلاینده و زمان انتشار آلاینده در رودخانه به‌کار بردند، معادله مبنی بر حرکت احتمال به‌صورت بازگشتی با استفاده از یک روش آنالیز حساسیت (آنالیز الحاقی) استخراج کردند، سپس مدل را با استفاده از راه‌حل‌های تحلیلی و برخی از داده‌های واقعی توسعه دادند. روش پیشنهادی، دارای دقت بالا و محاسبات کارآمد بود، همچنین در هندسه رودخانه و جریان هیچ ساده‌سازی صورت نگرفت. بر همین اساس این روش را برای اهداف عملی توصیه کردند.

(Ghane *et al.*, 2017) یک مدل عددی بر پایه‌ی آنالیز الحاقی توسعه دادند. که در بخش اول تحقیق خود، ابتدا کاربرد مدل مذکور در رودخانه‌ی سورن انگلستان بررسی و سپس سعی نمودند که کاربرد آن در شبکه‌ای از رودخانه‌ها نیز بررسی کنند. در پایان نتایج نشان داده است که مدل ذکرشده به‌خوبی قادر است فقط با یک مرتبه شبیه‌سازی، تمامی نقاط مشکوک به منبع آلاینده را شناسایی کند.

(Bavandpouri *et al.*, 2017) معادله یک‌بعدی انتقال آلودگی در رودخانه با ضرایب وابسته به مکان با استفاده از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، (GITT)، در دامنه‌ای با طول محدود حل کردند. در تکنیک GITT تبدیل‌های مستقیم و معکوسی تعریف می‌شود که استفاده از آن‌ها در حل مسئله منجر به تولید دستگاهی از معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان و بنابراین ساده شدن حل معادله حاکم بر پدیده می‌گردد. نتایج حل معادله با ضرایب ثابت و حل معادله با ضرایب متغیر مقایسه کردند. محاسبه شاخص‌های آماری در این حالت بیانگر عدم دقت کافی نتایج معادله انتقال آلودگی با ضرایب ثابت است.

(Dahmardan *et al.*, 2018) برای شناسایی مکان منبع آلاینده در رودخانه بدون داشتن هیچ‌گونه اطلاعات پیشینی از منبع از یک چارچوب کاملاً ریاضی استفاده کردند. مزیت مدل بازگشتی ارائه‌شده در آن مطالعه، این است که تنها با برداشت منحنی غلظت-زمان از دو نقطهٔ بالادست و پایین‌دست منبع آلاینده، می‌توان مکان منبع را با بیشترین دقت به‌دست آورد. نتیجه نشان داد که این مدل به خطای ضریب‌ها حساس نیست. صحت‌سنجی بین حالت دقیق و نتایج حاصل از مدل معکوس با دقت مناسبی قابل‌قبول بود.

در مقاله حاضر روش ریاضی شبه‌معکوس‌پذیری برای تعیین تاریخچه غلظت آلاینده در نقاط مختلف رودخانه به‌کار برده شده است که با برداشت داده سری زمانی غلظت آلاینده در یک نقطه از رودخانه، می‌توان گفت که در بازه‌های مختلف رودخانه و یا نقاط مختلف در طول بازه زمانی مشخص چه غلظتی از آلاینده موجود در رودخانه تجربه شده است، در تحقیق حاضر برای اولین بار با استفاده از روشی جدید مشکل برداشت داده از کل طول رودخانه برطرف گردیده است و همچنین استفاده از شرایط جریان غیریکنواخت در رودخانه که نزدیک به شرایط واقعی جریان می‌باشد از نقاط قوت این تحقیق است. به عبارتی دیگر نوآوری مقاله حاضر به‌طور کلی، استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری در رودخانه و رفع محدودیت برداشت غلظت آینده در تمامی نقاط

در یک زمان (پروفیل مکانی غلظت آلاینده) و به دست آوردن تاریخچه غلظت آلاینده تجربه‌شده در تمامی نقاط مختلف رودخانه می‌باشد.

مواد و روش‌ها

در تحقیق انجام‌گرفته از فرم یک‌بعدی رابطه‌ی انتقال آلاینده یعنی رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی استفاده شده است. فرم کلی رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی در حالت یک‌بعدی به‌صورت زیر می‌باشد:

(رابطه ۱)

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t}=-\frac{\partial(QC)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(AE_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)-AkC+AS$$

در رابطه‌ی (رابطه ۱) x بعد مکان، t بعد زمان، A سطح مقطع جریان، Q دبی جریان، C غلظت آلاینده، E_x ضریب پراکندگی در جهت طول رودخانه است، همچنین k ضریب ترم واکنش و S ترم منبع آلاینده است.

با توجه به شرایط جریان در نظر گرفته‌شده برای تحقیق، به‌صورت ماندگار و غیریکنواخت در رودخانه فرض شده است پس بدیهی است تغییراتی در زمان برای پارامترها اتفاق نمی‌افتد پس رابطه‌ی (رابطه ۲) با توجه به شرایط جریان به‌صورت زیر توسعه می‌یابد:

(رابطه ۲)

$$A\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial(QC)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(AE_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)-AkC+AS$$

رابطه‌ی فوق برای تعیین پارامترهای جریان در حالت یک‌بعدی از حل معادلات سنت-ونانت استفاده می‌گردد، که معادلات ذکرشده به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

(رابطه ۳)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right)+gA\frac{\partial y}{\partial x}+gA\left(S_f-S_0\right)=0$$

(رابطه ۴)

در معادلات بالا،x بعد مکان، A سطح مقطع جریان، Q دبی جریان، y عمق جریان، S_f شیب‌خط انرژی، S_0 شیب بستر رودخانه است.

رابطه‌ی (رابطه ۲) به‌صورت معکوس زمانی (گام‌های زمانی منفی) به روش‌های متداول حل معادلات دیفرانسیلی جزئی قابل‌حل نیست و در دسته‌ی معادلات دیفرانسیلی جزئی بدخیم قرار می‌گیرد (Bagtzoglou and Atmadja, 2003). بدیهی است که پاسخ‌های رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی در گام‌های زمانی منفی به همگرایی لازم نمی‌رسند، پس روش شبه‌معکوس‌پذیری با استفاده از اضافه نمودن ترم مشتق چهارم به رابطه‌ی مذکور از واگرایی پاسخ‌های رابطه‌ی برگشتی جلوگیری می‌نماید که اضافه نمودن چنین پارامتری موجب تنظیم پاسخ‌های رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی در گام‌های زمانی منفی می‌گردد و به همگرایی لازم می‌رساند (Skaggs and Kabala, 1995).

پس رابطه‌ی (رابطه ۲) توسط پارامتر مشتق چهارم و روش شبه‌معکوس‌پذیری به‌صورت زیر جایگذاری و بازنویسی می‌گردد:

$$A\frac{\partial C}{\partial t}=-\frac{\partial(QC)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(AE_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\varepsilon\frac{\partial^4 C}{\partial x^4}$$

(رابطه ۵)

در رابطه‌ی **Error! Reference source not found.**، ε ضریب پایداری نام دارد و به پارامتر ($\varepsilon\frac{\partial^4 C}{\partial x^4}$) ترم پایداری گفته می‌شود، در ترم پایداری ضریب پایداری نقش تنظیم‌کنندگی دارد و تغییر در ضریب پایداری به‌صورت مناسب در همگرایی پاسخ‌های برگشتی نقش اساسی را دارد (Qian and Mao., 2011). اساس و پایه روش شبه‌معکوس‌پذیری بر مبنای ترم پایداری است و در ترم پایداری، ضریب پایداری نقش اصلی را داراست (Lattes and Lions, 1969).

ذکر این نکته ضروری خواهد بود که در این تحقیق در رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی، ضریب واکنش و ترم منبع برابر صفر فرض می‌گردند.

شرایط اولیه و مرزی رابطه‌ی بازنویسی شده توسط روش شبه‌معکوس‌پذیری (رابطه‌ی ۵) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0,t)=0$$

(رابطه ۵)

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L,t)=0$$

(رابطه ۶)

$$\frac{\partial^2 C(0,t)}{\partial x^2}=0$$

(رابطه ۷)

$$\frac{\partial^2 C(L,t)}{\partial x^2}=0$$

(رابطه ۸)

$$C(x,T)=\xi(x)$$

(رابطه ۹)

در معادلات بالا، L طول رودخانه، T کل زمان شبیه‌سازی، $\xi(x)$ شرط انتهایی و پروفیل طولی غلظت آلاینده از کل طول رودخانه است.

در معادلات بالا نام از شرایط انتهایی برده شده است، برای اینکه بتوان همچون دیگر معادلات دیفرانسیلی جزئی از شرایط اولیه استفاده شود باید تغییر و متغیری به رابطه‌ی **Error! Reference source not found.** اعمال گردد، بدیهی است با استفاده از تغییر و متغیر در رابطه‌ی زیر می‌توان شرایط انتهایی

رابطه‌ی **Error! Reference source not found.**) را با شرایط اولیه تبدیل نمود. تغییر و متغیر به‌کاررفته به‌صورت زیر است:

$$\tau = T - t$$ (رابطه ۱۱)

رابطه بازنویسی شده توسط تغییر و متغیر فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

$$A\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial (QC)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(AE_x \frac{\partial C}{\partial x}\right) - \varepsilon \frac{\partial^4 C}{\partial x^4}$$ (رابطه ۱۲)

بدیهی است که با تغییر و متغیر اعمال‌شده در رابطه‌ی **Error! Reference source not found.**) شرایط مرزی و اولیه تغییر خواهد نمود و به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial C}{\partial x}(0,\tau) = 0$$ (رابطه ۱۰)

$$\frac{\partial C}{\partial x}(L,\tau) = 0$$ (رابطه ۱۱)

$$\frac{\partial^2 C(0,\tau)}{\partial x^2} = 0$$ (رابطه ۱۲)

$$\frac{\partial^2 C(L,\tau)}{\partial x^2} = 0$$ (رابطه ۱۳)

$$C(x,0) = \xi(x)$$ (رابطه ۱۴)

راه‌حل‌هایی برای محدودیت‌های روش شبه‌معکوس‌پذیری

الف) تعیین مقدار مناسب ضریب پایداری

ذکر نکاتی در مورد ضریب پایداری و رعایت نکاتی در این مورد که ادامه ذکر خواهند شد، ضروری خواهد بود از آن جهت که در انتخاب مقدار مناسب ضریب پایداری نکاتی وجود دارد به شرح اینکه، اگر مقدار ضریب مذکور از مقدار مناسب فاصله بگیرد بدیهی است که پاسخ صحیح از رابطه‌ی برگشتی دریافت نخواهد شد، البته معیار دقیق و مشخصی برای تعیین میزان ضریب پایداری وجود ندارد اما از پاسخ‌های دریافتی می‌توان مقدار صحیح آن را به دست آورد. اگر مقدار ضریب پایداری از مقدار مناسب آن کم‌تر فرض شود پاسخ‌های حل معکوس به صفر میل می‌نماید و نمودارهای به‌دست‌آمده از حل معکوس حالت قله‌ای می‌گیرد، ولی اگر از مقدار مناسب بیش‌تر باشد، پاسخ‌های حل معکوس به بی‌نهایت میل می‌نماید و اعداد اصطلاحاً واگرا می‌شوند، پس در یک جمع‌بندی کلی می‌توان با استفاده از مشاهده پاسخ‌های حل معکوس و رعایت نکات فوق‌الذکر به پاسخ صحیح دست پیدا نمود. همچنین هرچه میزان خطای موجود در اندازه‌گیری داده‌های رودخانه بیش‌تر باشد، پاسخ‌های حل معکوس دارای دقت کم‌تری است و همچنین برای دست‌یابی به پاسخ‌های صحیح هرچه میزان خطا بیش‌تر شود باید مقادیر بیش‌تری برای ضریب پایداری در نظر گرفت.

ب) رفع محدودیت شرایط اولیه روش شبه‌معکوس‌پذیری

یکی از محدودیت‌های روش شبه‌معکوس‌پذیری، ارضا شرایط اولیه موجود در رابطه‌ی معکوس روش مذکور می‌باشد و همین دلیل کافی خواهد بود که محققین نتوانند در محیط رودخانه برای حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی از این روش استفاده کافی ببرند زیرا که اندازه‌گیری غلظت آلاینده در یک زمان و در همه‌ی طول بازه رودخانه امری بسیار هزینه‌بر و یا غیرممکن می‌باشد پس برای رفع چنین محدودیتی باید چاره‌ای اندیشید، برای بر طرف کردن چنین مشکلی در این تحقیق از روشی جدید استفاده شده است تا بتوان از روش شبه‌معکوس‌پذیری در رودخانه بهره برد. توضیحات روش مذکور به این شرح می‌باشد که می‌توان با برداشت داده از یک نقطه در یک بازه زمانی مشخص می‌توان شرایط اولیه رابطه‌ی بازنویسی شده با استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری را به دست آورد، برای مثال می‌توان رودخانه‌ای به طول L فرض کرد، که در بازه ۰ تا L نقطه‌ای مانند a نقطه مشاهداتی و یا همان اندازه‌گیری باشد که در بازه زمانی مشخص عمل اندازه‌گیری غلظت آلاینده را انجام می‌دهد. فقط باید این نکته اساسی در اندازه‌گیری رعایت شود، اندازه‌گیری غلظت آلاینده حداقل تا زمانی باید انجام شود که غلظت آلاینده برابر صفر شود تا بتوان ادامه بازه رودخانه (a تا L) را به‌عنوان بازه شبیه‌سازی در نظر گرفت و شرط مرز ورودی رابطه‌ی مستقیم بازه مذکور را ارضا نماید، پس از دریافت داده‌های غلظت آلاینده در بازه مذکور، داده‌های بدست آمده را به‌عنوان شرط مرز ورودی در نظر گرفته می‌شود که تابع شدت غلظت آلاینده است (داده‌ها در یک مکان در بازه‌های زمانی مختلف) مدل مستقیم رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی برای بازه (a تا L) در نظر گرفته می‌شود و از این مدل مستقیم می‌توان شرط انتهایی و یا همان شرط اولیه رابطه‌ی روش شبه‌معکوس‌پذیری را به دست آورد و می‌توان آن را استفاده نمود و این‌گونه مشکل محدودیت روش شبه‌معکوس‌پذیری برطرف می‌گردد.

روش عددی

برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی، ابتدا نیاز به درک صحیحی از روش‌های گسسته‌سازی هست روش‌های فراوانی برای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیلی موجود می‌باشد اما باید دانست که با توجه به نوع رابطه‌ی و همچنین پاسخ‌های مورد انتظار محقق، روش‌های گسسته‌سازی متفاوت خواهد بود، در تحقیق حاضر با توجه به این نکته که تمرکز بر حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی می‌باشد. پس روش گسسته‌سازی

که انتخاب شده است، با تفاسیر گفته‌شده برای مشتق‌های مکانی از تقریب تفاضل مرکزی و برای مشتق‌های زمانی از الگوی کرانک-نیکلسون استفاده شده است. پس با توجه به نوع گسسته‌سازی‌های ذکرشده، گسسته‌سازی رابطه‌ی **Error! Reference source not found.** به‌طور کلی به‌صورت زیر در خواهد آمد:

(رابطه ۱۵)

$$A_i^j\left(\frac{C_i^{j+1}-C_i^j}{\Delta\tau}\right)=\frac{(QC)_{i+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}-(QC)_{i-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x}-\frac{\left[(AE_x)_{i+1}C_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}\right]}{\Delta x^2}+\frac{2\left[(AE_x)_iC_i^{j+\frac{1}{2}}\right]}{\Delta x^2}$$
$$-\frac{\left[(AE_x)_{i-1}C_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}\right]}{\Delta x^2}-\varepsilon\left(\frac{C_{i+2}^{j+\frac{1}{2}}-4C_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}+6C_i^{j+\frac{1}{2}}-4C_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}+C_{i-2}^{j+\frac{1}{2}}}{\Delta x^4}\right)$$

در (رابطه ۱۵)، $\Delta\tau$ گام زمانی، Δx گام مکانی، و همچنین i شمارنده مکان و j شمارنده زمان است. که گسسته‌سازی کلی این رابطه‌ی به‌صورت زیر در خواهد آمد:

(رابطه ۱۶)

$$\Delta\tau\left(+\frac{\varepsilon}{2\Delta x^4}\right)C_{i+2}^{j+1}+\Delta\tau\left[-\frac{4\varepsilon}{2\Delta x^4}+\frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}-\frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2}\right]C_{i+1}^{j+1}+\Delta\tau\left[\frac{6\varepsilon}{2\Delta x^4}-\frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}-\frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}\right]C_i^{j+1}$$
$$+\Delta\tau\left[-\frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2}+\frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2}+\frac{A_i}{\Delta\tau}\right]C_i^{j+1}+\Delta\tau\left[-\frac{4\varepsilon}{2\Delta x^4}+\frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}+\frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2}\right]C_{i-1}^{j+1}+\Delta\tau\left(+\frac{\varepsilon}{2\Delta x^4}\right)C_{i-2}^{j+1}$$
$$=\Delta\tau\left(-\frac{\varepsilon}{2\Delta x^4}\right)C_{i+2}^{j}+\Delta\tau\left[\frac{4\varepsilon}{2\Delta x^4}-\frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}+\frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2}\right]C_{i+1}^{j}+$$
$$\Delta\tau\left[-\frac{6\varepsilon}{2\Delta x^4}+\frac{(AE)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}+\frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}\right]C_i^{j}+\Delta\tau\left[\frac{Q_{i+1}}{4\Delta x^2}-\frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2}+\frac{A_i}{\Delta\tau}\right]C_i^{j}+$$
$$\Delta\tau\left[\frac{4\varepsilon}{2\Delta x^4}-\frac{(AE)_{i-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}-\frac{Q_{i-1}}{4\Delta x^2}\right]C_{i-1}^{j}+\Delta\tau\left(-\frac{\varepsilon}{2\Delta x^4}\right)C_{i-2}^{j}$$

در روابط بالا، $\Delta\tau$ گام زمانی، Δx گام مکانی، و همچنین i شمارنده مکان و j شمارنده زمان است.

با توجه به روابط بالا و نوع گسسته‌سازی ذکرشده، برای ارائه ماتریس ضرایب به روابط زیر نیاز است:

(رابطه ۱۷)

$$a_{11}=-1,\ a_{12}=1....\ a_{1n}=0$$
$$a_{21}=1,\ a_{22}=-2,a_{23}=1,\ a_{24}=0....a_{2n}=0\ \ a_{31}=\Delta\tau\left(\frac{\varepsilon}{2\Delta x^4}\right),$$
$$a_{32}=\Delta\tau\left[-\frac{4\varepsilon}{2\Delta x^4}+\frac{(AE)_{3-\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2}+\frac{Q_{3-1}}{4\Delta x^2}\right],\ a_{33}=\dots$$

در رابطه (رابطه ۱۶) $C_{...}^{\ j}$ بردار معلوم (شرایط اولیه)، همچنین $C_{...}^{\ j+1}$ بردار مجهولات است. با توجه به رابطه (رابطه ۱۶) مشاهده می‌شود که برای تشکیل ماتریس ضرایب و با توجه به ترم مشتق چهارم، ۴-n رابطه‌ی وجود دارد در حالی که تعداد مجهولات n تا است پس نیاز به ۴ رابطه‌ی دیگر می‌باشد تا تعداد معادلات برابر مجهولات گردد پس باید از ۴ شرط مرزی استفاده شود و این چهار رابطه‌ی شرط مرزی تعداد مجهولات را برابر معادلات می‌نماید. با توجه به شرایط مرزی در نظر گرفته شده و روابط به‌کار رفته در ماتریس ضرایب به صورت زیر خواهد بود:

(رابطه ۱۸)

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & & & & & & & 0\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & & & & & & 0\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & \cdots & & & 0\\
0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & & & & & & \ddots & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & \cdots & a_{n-1,n} & a_{nn}
\end{bmatrix}$$

(رابطه ۱۹)

$$\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\C_n\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

در یک توضیح کلی برای روش ارائه‌شده در این تحقیق این‌گونه می‌توان توضیح داد که روش شبه‌معکوس‌پذیری ابتدا به‌عنوان ورودی داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده یا داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده اندازه‌گیری شده را دریافت می‌نماید، مشخص است بازه زمانی برداشت داده محدود می‌باشد، داده‌های غلظت باید از صفر شروع و به صفر خم شود تا از آن بتوان به‌عنوان یک منبع آلودگی استفاده نمود، همچنین خروجی‌های جریان که سرعت، مقطع جریان، ضریب پراکندگی متغیر در مکان به‌عنوان ورودی مدل وارد خواهند شد، پس از دریافت ورودی‌های معرفی‌شده، مدل معکوس قادر خواهد بود در هر مکان داده‌های سری زمانی غلظت را در طول بازه زمانی اندازه‌گیری داده‌ها، به کاربر بدهد، که می‌توان با انجام محاسبات متوسط‌گیری در هر بازه در طول زمانی مشخص، غلظت دریافتی در زمان‌های مختلف را محاسبه نماید و اطلاعات کافی را در مورد تاریخچه غلظت دریافتی هر بازه مکانی مشخص نماید.

نتایج و بحث

برای حل رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی ابتدا نیاز به حل معادلات جریان است که با فرض یک‌بعدی بودن جریان می‌توان از معادلات سنت-ونانت استفاده نمود، که با حل معادلات جریان مجهولاتی چون دبی، عمق، سرعت و دیگر پارامترهای جریان به‌دست می‌آید. مشخصات رودخانه در جدول و اشکال مختلف ارائه خواهدشد. با توجه مشخصات ارائه‌شده در شکل ۱) نمودارهای دبی جریان، سرعت، سطح مقطع و ضریب پراکندگی جریان نسبت به طول رودخانه ارائه می‌گردد، همچنین ضریب پراکندگی در این تحقیق

توسط رابطه‌ی Deng *et al* (2001) که رابطه‌ای محاسبه شده است.

رابطه‌ی Deng *et al* (2001) به‌صورت زیر می‌باشد:

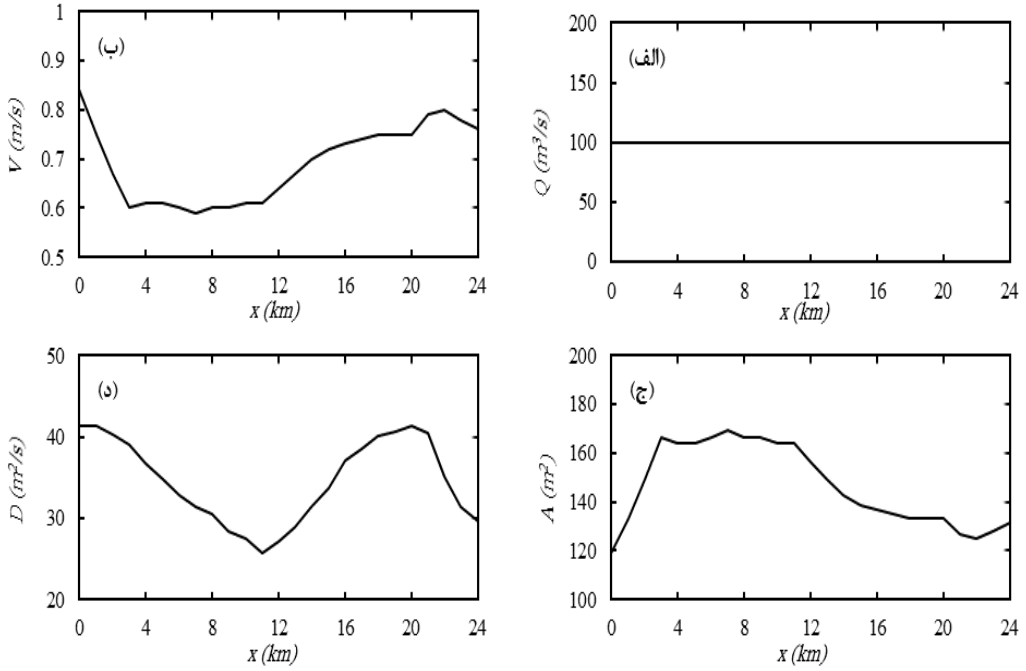
$$D_L = \frac{0.15}{8\varepsilon_{t0}} \frac{U^2 B^{\frac{5}{3}}}{H^{\frac{2}{3}} U_*} \quad (۲۰)$$

$$\varepsilon_{t0} = 0.145 + \frac{1}{3520}\left(\frac{U}{U_*}\right)\left(\frac{B}{H}\right)^{1.38} \quad (رابطه ۲۱)$$

در رابطه (۲۰)، D_L، برابر با ضریب پراکندگی طولی، U برابر با سرعت متوسط، B برابر با عرض متوسط مقطع، H برابر با عمق متوسط مقطع و U_* نیز برابر با سرعت برشی است. جدول (۱) مشخصات رودخانه فرضی را نشان می‌دهد.

جدول ۱. مشخصات رودخانه فرضی

مشخصات رودخانه	پارامترها
طول رودخانه	۲۴ (km)
گام‌های مکانی	۱۰۰ (m)
ضریب زبری مانینگ	۰/۰۳۵
شرط مرزی در بالادست	دبی ثابت ۱۰۰ (m^3/s)
شرط مرزی در پایین‌دست	شیب خط جریان ۰/۰۰۳ (m/m)
زمان شبیه‌سازی	۲۴ (hr)



شکل ۱. خروجی مدل جریان (ماندگار و غیریکنواخت)، (الف): دبی، (ب): سرعت متوسط مقطع، (ج): سطح مقطع جریان، (د): ضریب پراکندگی طولی

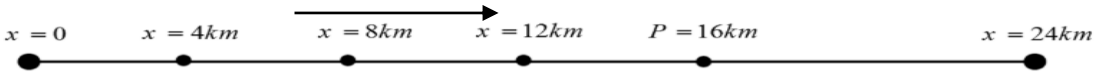
بر اساس نتایج پژوهش حاضر می‌تواند با برداشت داده به‌صورت سری زمانی در نقطه شاهد (ایستگاه اندازه‌گیری) پس‌بینی نماید که آلاینده در چه بازه زمانی و با چه الگویی زمانی بارگذاری شده است، پروفیل برگشتی غلظت آلاینده را نیز می‌تواند در هر زمان در کل بازه رودخانه ترسیم نماید، این خروجی کمک شایانی می‌توان در این جهت نماید که اگر به‌طور مثال در بالادست نقطه شاهد در بازه‌ای از رودخانه از آب برداشت شود مانند وجود شهر یا مجموعه زمین‌های کشاورزی و ... می‌توان گفت و در اصطلاح پس‌بینی نمود که در یک بازه زمانی مشخص در هر طول از رودخانه پیک غلظت آلاینده موجود در آب و همچنین متوسط غلظت آلاینده‌ای که در آب رودخانه در هر بازه مکانی تا چه اندازه بوده است. برای درک بهتر نتایج و توضیحات ارائه‌شده در این بخش از مثالی فرضی و همچنین از داده‌های غلظت آلاینده به‌صورت سری زمانی در ایستگاه اهواز استفاده شده است.

مثال فرضی

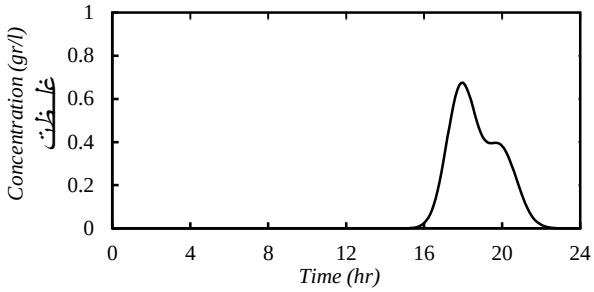
رودخانه‌ای به طول ۲۴ کیلومتر فرض می‌شود، پارامترهای جریان مانند شکل ۱) است، ایستگاه برداشت داده در فاصله ۱۶ کیلومتری مرز ورودی رودخانه قرار دارد و داده‌های اندازه‌گیری به‌صورت ۲۴ ساعته برداشت می‌شوند. داده‌های برداشت‌شده در نقطه شاهد به‌صورت سری زمانی هستند و با رسم داده‌های برداشت‌شده در بازه زمانی برداشت به‌صورت شکل ۳) در خواهند آمد. لازم به ذکر است که گام زمانی برداشت داده ۳۶۰ ثانیه است، یعنی در هر ۳۶۰ ثانیه یک‌بار غلظت آلاینده موجود در رودخانه برداشت می‌گردد و به داده‌های سری زمانی ۱۵ درصد خطا اعمال

شده است. همچنین شماتیک رودخانه فرض شده به طول ۲۴ کیلومتر در شکل ۲) با دیگر نقاط مشخص ارائه شده است همان‌طور که مشخص است در ۱۶ کیلومتری مرز ورودی (P) رودخانه یک ایستگاه سنجه وجود دارد که همان نقطه شاهد است. و در شکل‌های (۴)، (۵)، (۶) و (۷) نمودار متوسط غلظت هر بازه به دست آمده است.

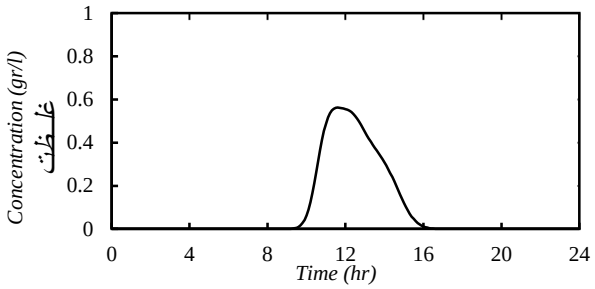
نمودار سری زمانی غلظت آلاینده برداشت‌شده در نقطه شاهد (ایستگاه اندازه‌گیری) به‌صورت شکل ۳) است.



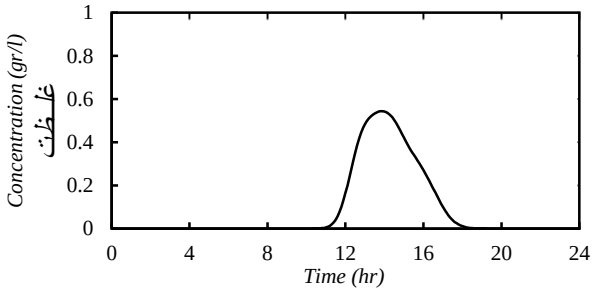
شکل ۲. شماتیک رودخانه همراه با نقطه شاهد و دیگر نقاط



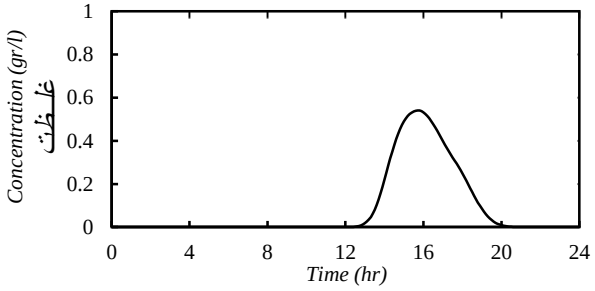
شکل ۳. سری زمانی غلظت آلاینده برداشت‌شده در نقطه شاهد طی ۲۴ ساعت برداشت داده



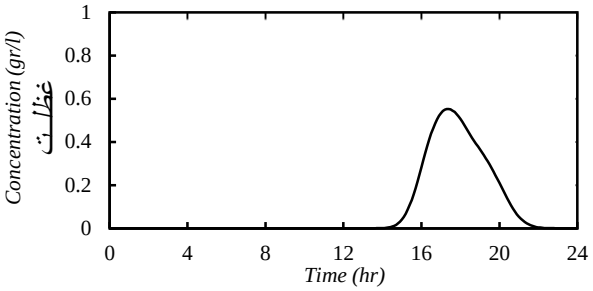
شکل ۴. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۰-۴ کیلومتر از مرز



شکل ۵. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۴-۸ کیلومتر از مرز



شکل ۶. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۸-۱۲ کیلومتر از مرز



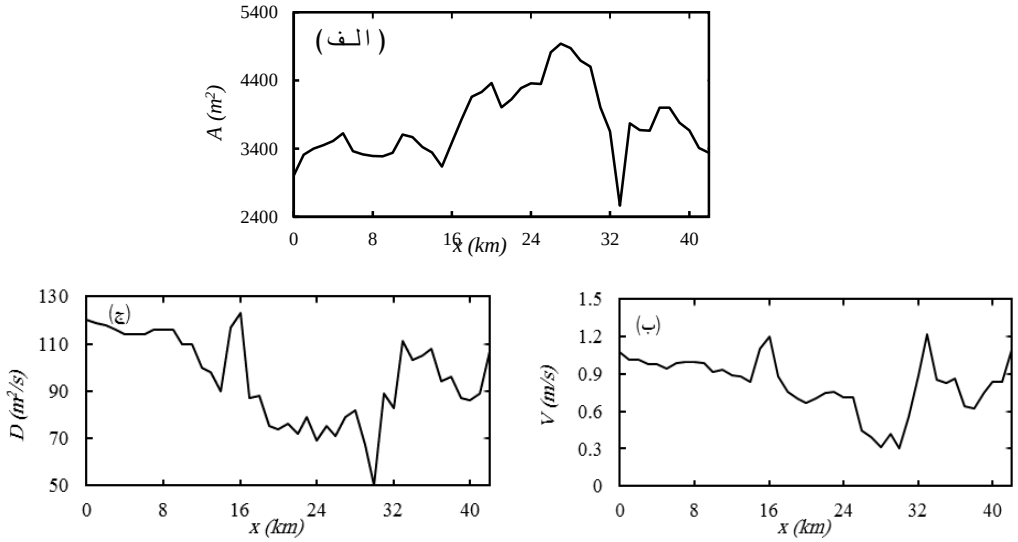
شکل ۷. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۱۲-۱۶ کیلومتر از مرز

جدول ۲. مشخصات آلاینده دریافتی هر بازه (مثال فرضی)

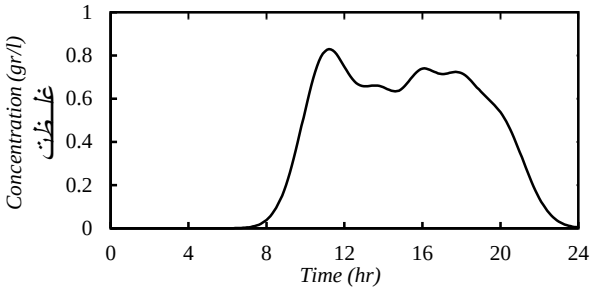
بازه‌های مکانی (km)	متوسط کل غلظت (gr/l)	بیش‌ترین غلظت (gr/l)	زمان دریافت غلظت ماکزیمم (hr)
۰-۴	۰/۰۸۲	۰/۵۶	۱۱:۴۸
۴-۸	۰/۰۸۱	۰/۵۴	۱۴
۸-۱۲	۰/۰۷۹	۰/۵۳	۱۵:۵۵
۱۲-۱۶	۰/۰۷۸	۰/۵۲	۱۷:۱۵

مطالعه موردی (رودخانه کارون)

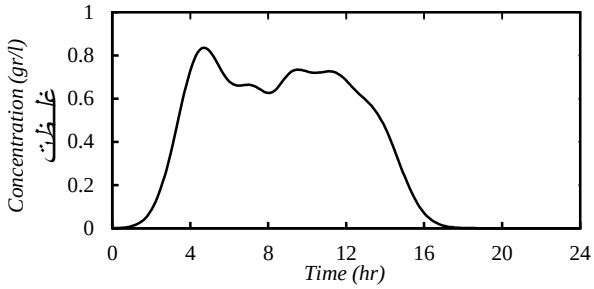
در این تحقیق از ابتدای ورود رودخانه کارون به شهر اهواز در ایستگاه زرگان ارتفاع متوسط ۱۸ متر از سطح دریا تا محل خروج آن از شهر اهواز واقع در ایستگاه کوت‌امیر به ارتفاع متوسط ۱۵ متر از سطح دریا، یعنی حدود ۴۲ کیلومتر از طول رودخانه مورد بررسی قرار گرفت (Hosesini *et al*., 2016). مشخصات پارامترهای جریان نیز در شکل (۸) ارائه شده است. برداشت غلظت آلاینده در ایستگاه کوت‌امیر اهواز به‌صورت شکل ۹) است، باید در نظر گرفت که توضیحات لازمه در مثال فرضی آورده شده‌اند پس در این بخش از ارائه توضیحات تکراری خودداری می‌گردد و فقط به ارائه نمودارهای مربوطه اکتفا می‌شود (شکل‌های ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳) همچنین خلاصه اطلاعات نمودارها در جدول (۳) ارائه شده است. لازم به ذکر است که دبی متوسط برابر ۲۶۰ مترمکعب بر ثانیه و ضریب زبری مانینگ به‌صورت متوسط ۰/۰۲۸ است (Hossieni *et al*., 2016).



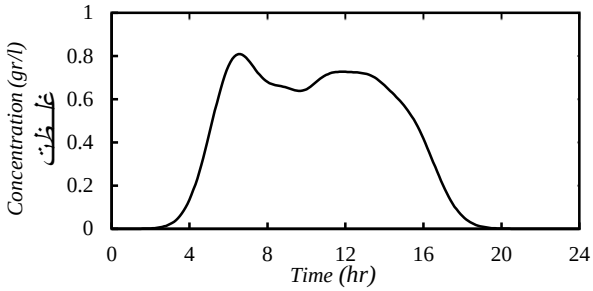
شکل ۸. پارامترهای جریان رودخانه کارون، (الف): سطح مقطع جریان، (ب): سرعت متوسط مقطع، (ج): ضریب پراکندگی طولی



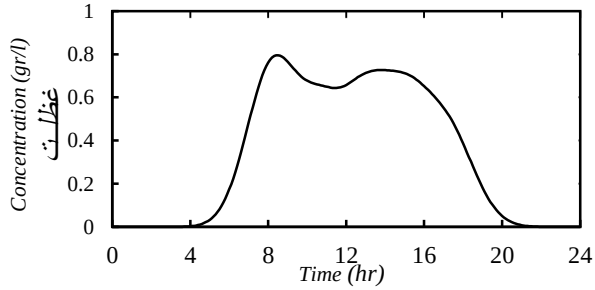
شکل ۹. داده‌های برداشتی سری زمانی غلظت آلاینده در ایستگاه کوت‌امیر اهواز



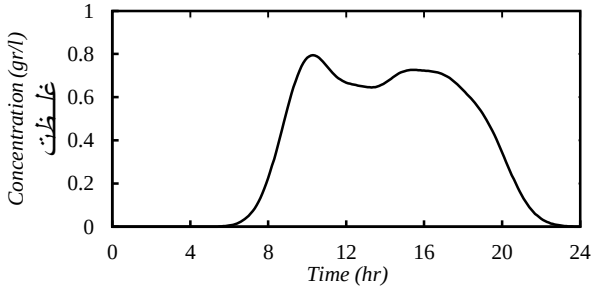
شکل ۱۰. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۲-۱۲ کیلومتر از ایستگاه زرگان



شکل ۱۱. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۱۲-۲۲ کیلومتر از ایستگاه زرگان



شکل ۱۲. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۲۲-۳۲ کیلومتر از ایستگاه زرگان



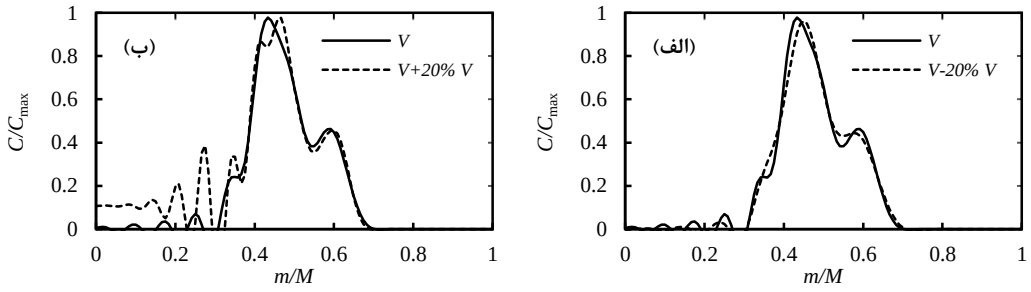
شکل ۱۳. نمودار سری زمانی متوسط غلظت آلاینده دریافتی در بازه ۳۲-۴۲ کیلومتر از ایستگاه زرگان

جدول ۳. مشخصات آلاینده دریافتی هر بازه (مطالعه موردی)

بازه‌های مکانی (km)	متوسط کل غلظت (gr/l)	بیش‌ترین غلظت (gr/l)	زمان دریافت غلظت ماکزیمم (hr)
۲-۱۲	۰/۳۴	۰/۸۳	۴:۲۱
۱۲-۲۲	۰/۳۳	۰/۸	۶:۱۷
۲۲-۳۲	۰/۳۲	۰/۷۹	۸:۱۳
۳۲-۴۲	۰/۳۲	۰/۷۸	۱۰:۰۴

قابل‌ذکر است که صحت‌سنجی مدل شبه‌معکوس‌پذیری توسط مثال فرضی انجام گرفته است و همچنین برای سنجش هر چه بهتر مدل از اعمال خطای ۱۵ درصد در نمودار سری زمانی غلظت آلاینده ورودی مدل معکوس استفاده شده است.

حال با توجه به نکات گفته‌شده اگر دیگر پارامترها یعنی پارامترهای جریان، تغییر کنند و یا به‌عبارتی دارای خطا باشند، مدل نسبت به این تغییر چه واکنشی نشان خواهد داد و در اصطلاح حساسیت مدل نسبت به تغییر پارامترهای جریان چه طور خواهد بود یا به کلامی دیگر تحلیل حساسیت مدل نسبت به پارامتر سرعت چگونه خواهد بود. در ادامه نمودارهای تغییرات ۲۰ درصدی پارامتر سرعت مورد بحث و بررسی واقع می‌گردد. قابل‌ذکر است، نمودارها به‌صورت بی‌بعد ارائه شده‌اند تا به‌صورت مفهومی‌تر مورد بررسی قرار گیرند.



شکل ۱۴. آنالیز حساسیت پارامتر سرعت، (الف): ۲۰- درصد سرعت، (ب): ۲۰+ درصد سرعت

مشاهده می‌شود که حساسیت مدل معکوس نسبت به تغییرات پارامتر سرعت چندان زیاد نیست، پس می‌توان بیان نمود که مدل شبه‌معکوس‌پذیری نسبت به خطای پارامتری حساس نیست و تأثیر بسزایی در پاسخ نهایی مدل و حل معکوس ندارد.

در قسمت مروری بر منابع پژوهش‌های متعددی در زمینه‌ی حل معکوس مورد بررسی قرار گرفت، مزیت مدل بازگشتی ارائه‌شده توسط (Dahmardan *et al.*, 2018) این‌گونه ارائه شد که تنها با برداشت منحنی غلظت-زمان از دو نقطهٔ بالادست و پایین‌دست منبع آلاینده، می‌توان مکان منبع را با بیشترین دقت به‌دست آورد. نتیجه نشان داد که این مدل به خطای ضریب‌ها حساس نیست. صحت‌سنجی بین حالت دقیق و نتایج حاصل از مدل معکوس با دقت مناسبی قابل‌قبول بود. مشاهده گردید که مدل شبه‌معکوس‌پذیری نیز نسبت به خطای ضریب سرعت حساس نیست و صحت‌سنجی مدل دقت بالایی را نشان می‌دهد همچنین مدل شبه‌معکوس‌پذیری با برداشت داده فقط در یک نقطه می‌تواند اطلاعات داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده در هر نقطه از رودخانه را در زمان‌های قبل بدهد. همچنین (Bavandpouri *et al.*, 2017) از تکنیک تبدیل انتگرالی تعمیم‌یافته، (GITT)، در دامنه‌ای با طول محدود حل کردند. در تکنیک GITT تبدیل‌های مستقیم و معکوسی تعریف می‌شود که استفاده از آن‌ها در حل مسئله منجر به تولید دستگاهی از معادلات دیفرانسیل وابسته به زمان می‌گردد، مشاهده شد که در مدل معکوس شبه‌معکوس‌پذیری از یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی استفاده گردید و بار و هزینه‌ی محاسباتی نسبتاً کمی تحمیل گردید.

نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر برای تعیین تاریخچه غلظت آلاینده در رودخانه از یک مثال فرضی و مطالعه موردی و استفاده از داده‌های سری زمانی غلظت آلاینده در ایستگاه اهواز، بهره برده شده است که روش به‌کاررفته روش ریاضی شبه‌معکوس‌پذیری است. روش مذکور با حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی که موجب

گسترش آلودگی در رودخانه می‌شود، غلظت تجربه‌شده در نقاط و بازه‌های مختلف رودخانه را تعیین می‌نماید. مشخص است حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی موجب ناپایداری پاسخ‌های حل برگشتی شده که طرح عمل روش شبه‌معکوس‌پذیری جلوگیری از ناپایداری پاسخ‌ها است که در این روش ترم پایداری وظیفه چنین مهمی را دارد و همچنین در ترم پایداری، ضریب پایداری (ε) نقش اساسی را دارد. محدودیت روش شبه‌معکوس‌پذیری که به‌موجب آن، محققان پیشین از این روش در رودخانه استفاده نکنند، نیاز روش مذکور به غلظت آلاینده در همه نقاط رودخانه در یک زمان (پروفیل طولی غلظت آلاینده) است که در مقاله حاضر با استفاده از روشی جدید، برطرف گردیده است. با استفاده از روش شبه‌معکوس‌پذیری و کاربرد آن در رودخانه با تمهیدات در نظر گرفته شده در این تحقیق می‌توان تعیین نمود که هر بازه و یا حتی نقطه‌ای از رودخانه در بازه زمانی مشخص چه مقدار غلظت آلاینده‌ای را تجربه نموده است و همچنین ساعت دریافتی بیش‌ترین غلظت آلاینده به‌صورت دقیق مشخص می‌شود که با ارائه جداول و نمودارها مفهوم توضیحات بهتر بیان شده‌اند که چنین امری می‌تواند در کمک به مدیریت برداشت منابع آب از رودخانه مؤثر و مهم واقع گردد. با اطلاعاتی که از داده‌های مدل برگشتی شبه‌معکوس‌پذیری می‌توان دریافت نمود، به‌راحتی می‌شود در برداشت آب از رودخانه مدیریت لازم را اعمال نمود تا اگر آلاینده رهاشده به‌صورت غیرقانونی بارگذاری شده باشد در بازه زمانی که مدیریت و مراجع به دنبال مقصر اصلی هستند، حداقل ساکنین هر بازه کم‌ترین لطمه را دریافت نمایند. همچنین با توجه به داده‌های دریافتی با توجه به توضیحات ذکرشده، این مدل توانایی پس‌بینی کامل زمان و الگوی بارگذاری شده در هر بازه مذکور را دارد با توجه به مقایسه توصیفی که بین روش‌های معکوس ارائه می‌شود می‌توان بیان نمود، با بررسی کلیه تحقیقات انجام‌شده در زمینه حل معکوس معادله انتقال، نتیجه گرفت که رویکردهای محققین مختلف در زمینه برخورد با این مسئله از حیث روش حل، به سه حالت کلی خواهد بود:

- حل مسئله معکوس به‌صورت یک مسئله شبیه‌سازی-بهینه‌سازی
- استفاده از روش‌های احتمالاتی و زمین‌آماری
- حل مسئله معکوس با استفاده از روش‌های ریاضی

روش شبه‌معکوس‌پذیری روشی ریاضی است که از مزایای نسبت به دیگر مدل‌ها می‌توان دامنه و هزینه‌ی محاسباتی کم‌تر و همچنین پاسخ‌های با دقت بیش‌تر اشاره نمود. در نتیجه‌گیری کلی می‌توان بیان نمود که روش ریاضی شبه‌معکوس‌پذیری در تعیین تاریخچه غلظت آلاینده در نقاط مختلف رودخانه و تعیین غلظت تجربه‌شده در بازه‌های مختلف رودخانه مؤثر عمل نموده است و نتایج قابل قبول‌می‌باشد.

پیشنهادها

پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آینده از شرایط جریان غیرماندگار و غیریکنواخت برای مدل شبه‌معکوس‌پذیری استفاده شود. همچنین پیشنهاد می‌گردد در تحقیقات آتی روش شبه‌معکوس‌پذیری با دیگر روش‌ها در زمینه‌ی حل معکوس رابطه‌ی جابه‌جایی-پراکندگی مقایسه و مورد بررسی واقع گردد.

REFERENCES

Atmadja, J. and Bagtzoglou, A.C. (2001). Pollution source identification in heterogeneous porous media. *Water Resources Research*, 37(8): 2113-2125.

Bavandpouri, G., Mazaheri, M. and Fotouhi Firozabadi, M. (2017). Analytical Solution of Contaminant Transport Equation in River by Arbitrary Variable Coefficients Using Generalized Integral Transform Technique. *Journal of Advanced Mathematical Modeling*, 7(1): 89-116. (In Farsi)

Bagtzoglou, A.C. (1992). Application of particle methods of reliable Identification of groundwater polloution sources. *Water resources management*. 6: 15-23.

Bagtzoglou, A.C. and Atmadja, J. (2003). Marching-jury backward beam equation and quasi-reversibility methods for hydrologic inversion: Application to contaminant plume spatial distribution recovery. *Water Resources Research*, 39(2): 146-187.

Chapra, S.C. (1997). Surface Water Quality Modeling. *New York*: McGraw-Hill.

Dahmardan, A., Mazaheri, M. and Mohammad Vali Samani, J. (2018). Identification of Location, Activity Time and Intensity of the Unknown Pollutant Source in River. *Journal of Environmental Hazards Management*, 5(1): 35-52. (In Farsi)

Denche, M. and Bessila, K. (2005). A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 301(2): 419-426.

Deng ,Z. Q., Singh, V. P & ,.Bengtsson, L. (2001). Longitudinal dispersion coefficient in straight rivers. *Journal of Hydraulic Engineering*, 127(11), .927 -919.

Dorroh, J. R. and Ru, Xeuping. (1998). The Application of the Method of Quasi-reversibility to the Sideways Heat Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 236(6): 503-519.

Ghane, A., Mazaheri, M. and Mohammad Vali Samani, J. (2016). Location and release time identification

of pollution point source in river networks based on the Backward Probability Method. *Journal of Environ Manage*, 180: 164-171.

Ghane, A., Mazaheri, M., Mohammad Vali Samani, J. (2017). Location and release time TRACING of pollition source in rivers based on compound model adjoint analysis and optimization method. Sharif Journal of Civil Engineering, 33.2(3.2): 95-104. (In Farsi)

Ismail-Zadeh, A.T. and Korotkil, I. A. and Tsepeler, A.I. (2006). Three-Dimensional numerical simulation of the inverse problem of thermal convection using the quasi-reversibilitiy method. *Water resources*, 46(12): 2176-2186.

Lattes, R., and Lions, J. (1969). The Method of Quasi-Reversibility: Applications to Partial Differential Equations. *Elsevier Sci*, New York.

Hossieni, P., Ildoromi, A., Hosseini, Y. (2016). The Study of Qual2kw Model Efficacy on River Self-purification (A Case Study of Karun River at Interval of Zargan to Kute Amir). *Journal of Environmental Science and Technology*, 18(4): 103-122. (In Farsi)

Mazaheri, M., Mohammad Vali Samani, J. and Samani, H.M.V. (2015). Mathematical Model for Pollution Source Identification in Rivers. *Environmental Forensics*, 16: 310-321.

Neupauer, R.M., Borchers, B. and Wilson, J.L. (2000). Comparison of inverse methods for reconstructing the release history of a groundwater contamination source. *Water Resources Research*, 36(9): 2469-2475.

Qian, A. and Mao, J. (2011). Quasi-Reversibility Regularization Method for Solving a Backward Heat Conduction Problem. *American Journal of Computational Mathematics*, 01(03): 159-162.

Skaggs, T.H. and Kabala, Z. J. (1995). Recovering the history of a groundwater contaminant plum: Method of quasi-reversibilitiy. *Water resources*, 31: 2669-2673.

Tong, Y. and Deng, Z. **(**2015). Moment-Based Method for Identification of Pollution Source in Rivers. *Journal of Environmental Engineering*, 141(10): 04015026.

Wilson, J.L. and Liu, J. 1994. Backward tracking to find the source of pollution. *Water Manag, Risk Remed*, 1, 181-199.

Xiong, X.-T., Fu, C.-L. and Qian, Z. (2006). Two numerical methods for solving a backward heat conduction problem. *Applied Mathematics and Computation*, 179(1), pp. 370-377.

Yang, F., Fu, C. and Li, X. (2014). Identifying an unknown source in space-fractional diffusion equation. *Acta Mathematica Scientia*, 34(4): 1012-1024.

Zhang, T. and Chen, Q. (2007). Identification of contaminant sources in enclosed spacey by a single sensor. *Indoor Air*, 17(6): 439-449.

Zhang, T. and Li, H. Wang. (2011). Identification of particulate contaminant source locations in enclosed spaces with inverse CFD modelling. *12th International Conference on Indoor Air Quality and Climate* 2011, 1: 667-672.