

## تحلیل دوره بازگشت‌های توام و شرطی چند مشخصه وابسته آبنمود رواناب با استفاده از توابع مفصل (مطالعه موردی: حوضه آبریز کسلیان)

سجاد عبداللهی اسدآبادی<sup>۱\*</sup>، علی محمد آخوندعلی<sup>۲</sup>، رسول میرعباسی نجف‌آبادی<sup>۳</sup>

۱. دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، دانشکده علوم آب، دانشگاه شهید چمران اهواز.

۲. استاد گروه هیدرولوژی و منابع آب، دانشکده علوم آب، دانشگاه شهید چمران اهواز.

۳. استادیار گروه مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه شهرکرد.

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۴/۱۲ - تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۶/۳۰ - تاریخ تصویب: ۱۳۹۶/۷/۷)

### چکیده

اخیراً استفاده از توابع مفصل به‌عنوان ابزاری کارآمد و انعطاف‌پذیر برای ایجاد توزیع‌های احتمالاتی توام پدیده‌های هیدرولوژیکی چند متغیره، از قبیل سیلاب توجه هیدرولوژیست‌ها را به خود جلب کرده است. هدف اصلی از مطالعه حاضر، استخراج و تحلیل دوره بازگشت‌های توام و شرطی تعدادی مشخصه وابسته آبنمود رواناب شامل حجم رواناب، دبی بیشینه، زمان پایه و زمان وقوع دبی بیشینه آبنمود می‌باشد. این مشخصه‌ها از ۶۰ رویداد ثبت‌شده در ایستگاه آبسنجی ولیک‌بن واقع در خروجی حوضه آبریز معرف کسلیان در بازه زمانی ۱۳۸۶-۱۳۵۴ استخراج شده است. از میان سه تابع مفصل در نظر گرفته شده شامل کلایتون، علی-میخائیل-حق و فرانک، برای دو زوج مشخصه وابسته حجم رواناب و دبی بیشینه و حجم رواناب و زمان پایه آبنمود، تابع مفصل فرانک به‌عنوان مفصل برتر انتخاب شد. همچنین برای دو مشخصه وابسته دیگر یعنی زمان وقوع دبی بیشینه و زمان پایه آبنمود، تابع مفصل کلایتون به‌عنوان مفصل برتر تشخیص داده شد. نهایتاً با ایجاد توزیع‌های توام مفصل مبنا اطلاعات ارزشمندی از قبیل توزیع‌های احتمالاتی توام، دوره بازگشت‌های توام و توام شرطی محاسبه و ترسیم گردید.

**واژه‌های کلیدی:** آبنمود رواناب، مفصل، دوره بازگشت توام، دوره بازگشت شرطی.

### مقدمه

مبتنی بر تحلیل احتمالاتی تک‌متغیره معیارهای قابل اعتمادی نمی‌باشند. به نظر می‌رسد نگرش احتمالاتی چند متغیره به پدیده‌های هیدرولوژیکی مختلف از جمله رواناب امری ضروری است. برای حل این مشکل می‌توان از توزیع‌های احتمالاتی دو یا چند متغیره استفاده نمود. Snyder (1962) و Wong (1963) برای اولین بار توزیع‌های احتمالاتی چندمتغیره مرسوم را در تحلیل‌های فراوانی هیدرولوژیکی بکار بردند و پس از آن شیوه چندمتغیره در مدل کردن مشخصه‌های باران، سیلاب و خشکسالی توسط محققین مختلف بکار برده شد. تحلیل فراوانی چندمتغیره در این مطالعات اغلب بر یک یا چند مورد از سه فرض اساسی زیر استوار بودند: ۱- متغیرها مستقل از هم بوده و با یکدیگر وابستگی ندارند. ۲- متغیرها از توزیع نرمال تبعیت می‌کنند و یا قابل تبدیل به توزیع نرمال هستند. ۳- متغیرها (مثل دبی بیشینه و حجم سیلاب) از توزیع‌های حاشیه‌ای<sup>۱</sup> یکسانی تبعیت می‌کنند. ولی در عمل بر خلاف فرض اول برخی متغیرهای هیدرولوژیکی به یکدیگر وابسته و بر خلاف فرض دوم

پدیده‌های هیدرولوژیکی ماهیتی تصادفی و احتمالاتی دارند و روابط حاکم بر این پدیده‌ها تا حدودی ناشناخته و مبهم است. به همین دلیل مدل‌سازی قطعی و دقیق آنها تقریباً مشکل و گاهی غیرممکن است. بنابراین برای توصیف، تخمین و پیش‌بینی این پدیده‌ها از تئوری آمار و احتمالات استفاده می‌شود (Mirabbasi et al., 2012). رواناب (پدیده هدف در این پژوهش) به‌عنوان یک متغیر تصادفی هیدرولوژیکی با مشخصه‌های مختلفی از جمله دبی بیشینه، زمان وقوع دبی بیشینه، زمان پایه آبنمود، حجم سیلاب و چند مشخصه دیگر توصیف می‌شود. شیوه معمول برای تحلیل احتمالاتی پدیده مذکور برآزش یک تابع توزیع تک متغیره بر روی یکی از مشخصه‌های آن است. در حالی که رواناب از چندین مشخصه تصادفی همبسته (مثلاً دبی بیشینه و حجم سیلاب) برخوردار است. از این‌رو، در بسیاری از موارد، معیارهای طراحی هیدرولوژیکی

1. Marginal distribution

\* نویسنده مسئول: sajad1998@yahoo.com

زمینه کاربرد توابع مفصل در تحلیل پدیده‌های مختلف هیدرولوژیکی بویژه بارش، دما، خشکسالی، سیلاب و آب زیرزمینی انجام شده که در ادامه به تعدادی از آنها اشاره می‌گردد. در مورد متغیرهای دما و بارش، Sanikhani *et al.* (2014) وابستگی دو متغیر دما و بارش را در ایستگاه هواشناسی تبریز، با استفاده از توابع مفصل مدل‌سازی نمودند. در این مطالعه از سه تابع مفصل شامل کلایتون، گامبل و فرانک برای ایجاد توزیع‌های دومتغیره استفاده شد. نتایج مطالعه مذکور نشان داد عملکرد هر سه تابع مفصل مورد بررسی نزدیک به هم بوده ولی با توجه به اینکه از بین سه تابع مفصل مورد بررسی، فقط مفصل فرانک قابلیت مدل کردن وابستگی‌های منفی را دارا می‌باشد، بنابراین به‌عنوان تابع مفصل مناسب جهت مدل کردن وابستگی بارش و دمای ایستگاه تبریز انتخاب گردید. در مورد پدیده مطالعه خشکسالی، Mirabbasi *et al.* (2014) برای شناسایی و تحلیل خشکسالی‌های هواشناختی ایستگاه هواشناسی ارومیه از سه شاخص کمبود توأم<sup>۴</sup> (JDI)، شاخص بارش استاندارد شده متداول (SPI) و شاخص SPI اصلاح شده (SPI<sup>mod</sup>) استفاده نمودند. شاخص JDI، با ایجاد توزیع توأم از شاخص‌های SPI<sup>mod</sup> با مقیاس‌های زمانی ۱ تا ۱۲ ماهه با استفاده از توابع مفصل بدست می‌آید. نتایج حاصل از این مطالعه نشان داد شاخص JDI، علاوه بر توصیف علمی وضعیت خشکسالی، قابلیت مشخص کردن آغاز خشکسالی‌ها و نیز خشکسالی‌های طولانی مدت را به‌صورت یکجا دارد. Ahmadi *et al.* (2015) از شاخص کمبود توأم (JDI) که شاخصی مفصل پایه است، به‌منظور مطالعه و ارزیابی خشکسالی‌های به وقوع پیوسته در چند استان واقع در حاشیه دریای خزر استفاده نمودند. نتایج این مطالعه نشان داد شاخص مذکور علاوه بر ارائه توصیفی مناسب از وضعیت خشکسالی، قابلیت مشخص کردن زمان ظهور خشکسالی‌ها را نیز دارد. Omidi and Mohammadzadeh (2016) در مطالعه‌ای با استفاده از توابع مفصل دومتغیره و تک‌پارامتری، تحلیل فراوانی توأمان شدت و مدت خشکسالی‌های هواشناختی قابل شناسایی در ایستگاه هواشناسی تهران را انجام دادند. نتایج این مطالعه نشان داد توابع مفصل به خوبی قادر به انجام این مهم بوده و با بسط آنها می‌توان متغیرهای بیشتری را نیز در مدل‌سازی وارد نمود. Azizabadi-Farahani *et al.* (2016) در مطالعه‌ای اثرات تغییر اقلیم را بر الگوی منحنی‌های شدت-مدت-فراوانی خشکسالی (SDF) در حوزه آبریز قره‌سو واقع در استان گلستان بررسی

معمولاً از توزیع‌های غیرنرمال تبعیت می‌کنند. همین‌طور این متغیرهای هیدرولوژیکی بعضاً ممکن است از توزیع حاشیه‌ای یکسانی هم پیروی نمایند (Bacchi *et al.*, 1994; Zhang and Singh, 2006). بنابراین، توزیع‌های چندمتغیره مرسوم برای تحلیل اغلب پدیده‌های هیدرولوژیکی از جمله رویدادهای سیلاب ممکن است مناسب نباشند، زیرا مشخصه‌های تصادفی این پدیده معمولاً از توزیع‌های متفاوت تبعیت می‌کنند. به‌علاوه وابستگی پیچیده‌ای بین مشخصه‌های مختلف سیلاب وجود دارد که توزیع‌های چندمتغیره مرسوم قادر به توصیف دقیق و واضح آن نیستند (De Michele *et al.*, 2005; Chen *et al.*, 2015). استفاده از توابع مفصل<sup>۱</sup> از جمله راهکارهای توصیه‌شده در جهت کاستن از نواقص روش‌های تحلیل چندمتغیره مرسوم می‌باشد (Salvadori *et al.*, 2007). با توجه به قابلیت‌های توابع مفصل، پدیده‌های هیدرولوژیکی می‌توانند با کاربرد توزیع‌های توأم<sup>۲</sup> یا توأم شرطی<sup>۳</sup> دومتغیره یا مرتبه بالاتر مورد بررسی قرار گرفته و در عین حال کل ساختار وابستگی بین متغیرها حفظ شود. همچنین می‌توان مشخصه‌های همبسته متغیرهای هیدرولوژیکی (نظیر حجم و دبی بیشینه هیدروگراف سیل) را که ممکن است دارای توابع توزیع‌های حاشیه‌ای متفاوت باشند، با استفاده از مفصل‌ها به هم پیوند داد. بنابراین، توزیع‌های توأم بدست آمده توصیف‌های دقیق‌تری از وضعیت رویدادهای هیدرولوژیکی بدون تکیه بر قضاوت‌های سلیقه‌ای یا فرض‌های ناصحیح در اختیار می‌گذارند. Kao and Govindaraju (2008) و Serinaldi and Kilsby (2013)، تحلیل چند متغیره احتمالاتی بر روی تعداد محدودی از مشخصه‌های هیتوگراف رگبارها (نظیر مقدار، تداوم زمانی و شدت متوسط) و هیدروگراف سیل‌ها (نظیر دبی بیشینه، حجم و زمان پایه) را با استفاده از مفصل‌های متقارن ارشمیدسی بررسی نمودند. Bender *et al.* (2014) در مطالعه‌ای، با استفاده از توابع مفصل و ۱۹۱ سال داده دبی جریان رودخانه راین واقع در کشور آلمان، تحلیل احتمالاتی توأمان دو مشخصه دبی بیشینه و حجم سیلاب را انجام دادند. (2015) Chen *et al.* در مطالعه‌ای دیگر تلاش نمودند با بهره‌گیری از یک مدل مفصل مبنای شبیه‌سازی دبی جریان را در دو رودخانه کلرادو و یانگ تسه انجام دهند. Requena *et al.* (2016) تحلیل فراوانی چند متغیره منطقه‌ای را با استفاده از مفهوم مفصل‌ها و داده‌های دبی بیشینه و حجم سیلاب، در منطقه‌ای در اسپانیا انجام دادند. در ایران نیز همسو با دیگر نقاط دنیا مطالعاتی در

1. Copula Functions  
2. Joint distribution  
3. Conditional joint distribution

آبنمود سیلاب (شامل زمان پایه، دبی بیشینه، حجم سیلاب و زمان وقوع دبی بیشینه) در حوضه آبریز معرف کسلیان با استفاده از توابع مفصل می‌باشد. از دیگر اهداف این پژوهش می‌توان به تخمین دوره بازگشت توأم و توأم شرطی ترکیبات مختلفی از مشخصه‌های وابسته سیلاب اشاره نمود.

## مواد و روش‌ها

### منطقه مورد مطالعه و داده‌های مورد استفاده

در مطالعه حاضر، از اطلاعات ۶۰ آبنمود رواناب ثبت شده در ایستگاه آبنسجی ولیک‌بن واقع در خروجی حوضه آبریز معرف کسلیان، شامل دبی بیشینه، حجم رواناب، زمان پایه و زمان وقوع دبی بیشینه در بازه زمانی ۱۳۸۶-۱۳۵۴ استفاده شده است. این حوضه با مساحتی بالغ بر ۶۸/۰۴ کیلومتر مربع و محیطی در حدود ۴۳ کیلومتر در محدوده عرض جغرافیایی  $35^{\circ}58'15''$  و  $36^{\circ}07'15''$  شمالی و طول جغرافیایی  $53^{\circ}08'44''$  و  $53^{\circ}15'42''$  شرقی واقع شده است. طول آبراهه اصلی این حوضه در حدود ۱۸/۷ کیلومتر بوده و در جهت شیب شمال به جنوب در حرکت است. رودخانه کسلیان پس از پیوستن به چند رودخانه دیگر نهایتاً تحت عنوان رودخانه تالار به دریای خزر می‌ریزد. زمان تمرکز این حوضه با استفاده از روش کرپیچ در حدود ۳/۸ ساعت تخمین زده شده است (Water Resources Researches Centre of Iran (TAMAB), 2009). همچنین در خروجی حوضه آبریز مذکور و در مسیر رودخانه کسلیان ایستگاه هیدرومتری ولیک‌بن قرار دارد (شکل ۱).

### تئوری اسکالر و توابع مفصل

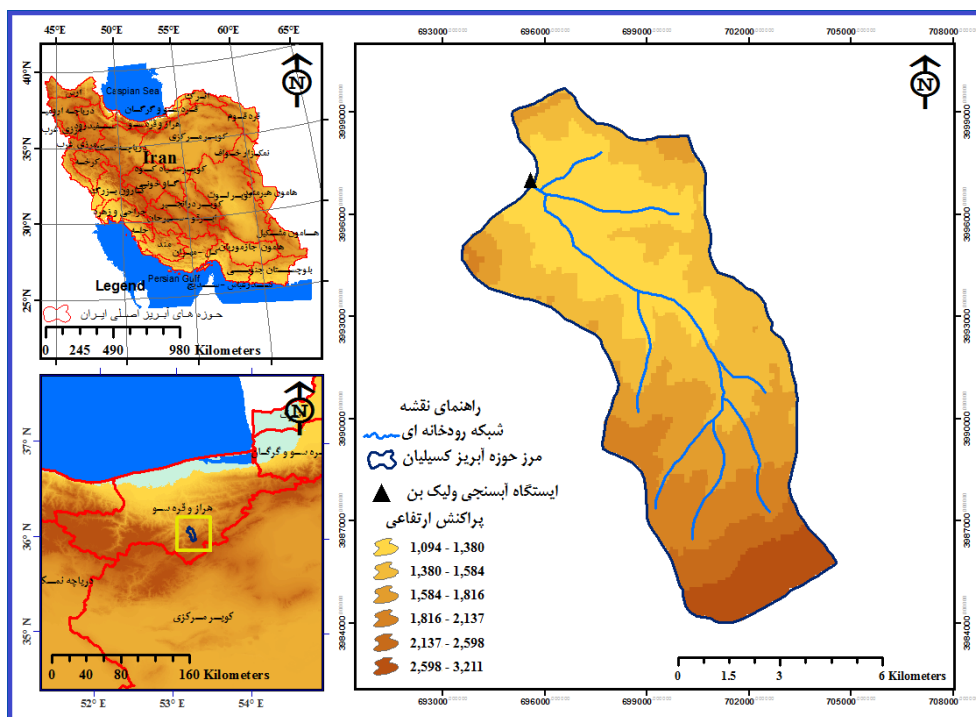
تابع مفصل، توزیع توأمی از متغیرهای تصادفی همبسته است که به صورت تابعی از توزیع‌های حاشیه‌ای تک متغیره بیان می‌گردد. به عبارت دیگر، یک مفصل تابعی است که توابع توزیع حاشیه‌ای تک متغیره را برای تشکیل یک تابع توزیع چندمتغیره، به هم پیوند می‌دهد. با استفاده از مفصل‌ها در ایجاد توزیع‌های چندمتغیره اثر وابستگی از اثرات توزیع‌های حاشیه‌ای تفکیک می‌شود. در استفاده از روش مفصل مشابه بودن نوع توزیع‌های حاشیه‌ای الزامی نیست (Nelassen, 2006). این مزیت انعطاف‌پذیری بیشتری را برای انتخاب توزیع‌های حاشیه‌ای تک متغیره مناسب که بخوبی بر داده‌های مشاهده شده برازش دارند، ارائه می‌دهد.

نمودند. در این مطالعه از توابع مفصل و مفهوم دوره بازگشت شرطی برای استخراج منحنی‌های SDF استفاده شد. در مورد پدیده سیلاب یا رواناب، (Rahimi et al. 2014) در مطالعه‌ای با استفاده توابع مفصل ارشمیدسی، تحلیل ساختار وابستگی بین دو متغیر دبی بیشینه و حجم سیلاب‌های ثبت شده در ایستگاه آبنسجی ارازکوسه واقع بر روی رودخانه چهل‌چای استان گلستان را بررسی نمودند. نتایج این مطالعه نشان داد تحلیل یک متغیره وقایع هیدرولوژیک به علت عدم در نظر گرفتن تمامی مشخصه‌های مؤثر در یک پدیده، تحلیلی جامع و به دور از خطا نمی‌باشد و به همین دلیل تحلیل چندمتغیره وقایع هیدرولوژیک توصیه گردید.

(Abbasian & Jalali 2015) با بهره‌گیری از توابع مفصل تحلیل فراوانی توأم چند مشخصه کلیدی رواناب را در یکی از رودخانه‌های واقع در شمال ایران انجام دادند و دوره بازگشت-های توأم را محاسبه کردند. نتایج این پژوهش نشان داد، توابع مفصل ابزاری قدرتمند برای تحلیل چندمتغیره و احتمالاتی متغیرهای هیدرولوژیکی هستند. (Salari et al. 2015) با استفاده از توابع مفصل تحلیل فراوانی توأم سه مشخصه دبی بیشینه، حجم و تداوم سیلاب‌های ثبت شده در ایستگاه آبنسجی اهواز را بررسی کردند. بر اساس نتایج حاصل از این پژوهش مفصل گامبل-هوگارد به عنوان تابع مفصل برتر انتخاب گردیده و مقادیر احتمالات و دوره بازگشت‌های توأم استخراج شد. همچنین (Bahremand et al. 2016) در مطالعه‌ای کلی، به بررسی و شناخت الگوریتم‌های محاسباتی، پارامترها و شکل توزیع توابع مفصل پرکاربرد و جایگاه آنها در هیدرولوژی استوکاستیک پرداختند. این مطالعه نشان داد قطعاً توابع مفصل ابزار مفیدی در راستای شناخت احتمالاتی فرآیندهای هیدرولوژیکی بوده و قابلیت کاربرد در زمینه ارائه راهکارها و استراتژی‌های مدیریتی حوزه منابع آب را دارا هستند. در مورد آب زیرزمینی، (Ganjlikhani et al. 2016) به منظور پهنه‌بندی کیفی آب زیرزمینی از یک روش میانمایی بر اساس توابع مفصل استفاده کردند. در این مطالعه، چهار تابع مفصل ارشمیدسی شامل کلایتون، فرانک، گامبل و جوئی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج این پژوهش نشان داد روش میانمایی بر اساس توابع مفصل در مقایسه با نسخه‌های مختلف روش کریجینگ<sup>۱</sup> و روش معکوس فاصله وزن‌دار<sup>۲</sup> از عملکرد مناسبتری برخوردار است. هدف اصلی از مطالعه حاضر، مدل‌سازی توأم‌ان مشخصه‌های

1. Kriging

2. Inverse Distance Weighting



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی حوضه آبریز کسلیان و موقعیت مکانی ایستگاه آسنجی ولیک بن

بصورت  $F_{X,Y}(x,y)$  بیان شود، آنگاه یک تابع مفصل  $C$ ، بصورت رابطه (۲) وجود دارد.

$$F_{X,Y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (\text{رابطه ۲})$$

مشابه با توزیع‌های تک متغیره، برای توزیع‌های توام حاصل از مفصل‌ها نیز مفهوم تابع توزیع چگالی احتمال توام بصورت رابطه (۳) قابل تعریف است.

$$f_{X,Y}(x,y) = c(F_X(x), F_Y(y))f_X(x)f_Y(y) \quad (\text{رابطه ۳})$$

که در آن،  $c$  تابع چگالی متناظر با مفصل توام  $C$  بوده و بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$c(u,v) = \frac{\partial^2 C(u,v)}{\partial u \partial v} \quad (\text{رابطه ۴})$$

که در آن،  $u$  و  $v$  به ترتیب توابع توزیع تجمعی دومتغیره موردنظر یعنی  $F_X(x)$  و  $F_Y(y)$  می‌باشند و دامنه تغییرات آنها بین صفر و یک است. بررسی‌ها نشان می‌دهد متداولترین خانواده‌های توابع مفصل مورد استفاده قرار گرفته در مطالعات آب و هواشناسی، خانواده مفصل‌های ارشمیدسی می‌باشد (Nelsen, 2006; Mirabbasi et al., 2012). در مطالعه حاضر با الگو گرفتن از مطالعات مرتبط، به منظور مدلسازی توامان مشخصه‌های آب‌نمود سیلاب در حوضه آبریز کسلیان، سه تابع مفصل از این خانواده شامل کلایتون، علی-میخائیل-حق و فرانک مورد بررسی گرفت. در جدول (۱) خلاصه‌ای از مهمترین مشخصات مفصل‌های مذکور از قبیل تابع احتمال تجمعی و دامنه پارامتر وابستگی ( $\theta$ ) ارائه شده است.

اولین کاربرد توابع مفصل به Sklar (1959) نسبت داده شده است. تئوری مذکور چگونگی ارائه توزیع‌های چندمتغیره با بهره‌گیری از توزیع‌های تک متغیره را ارائه می‌دهد (Nelsen, 2006). برای کمیت‌های تصادفی پیوسته  $d$  بعدی  $\{X_1, \dots, X_d\}$  با توابع توزیع تجمعی حاشیه‌ای  $(CDF)$ ،  $u_j = F_{X_j}(x_j)$  که در آن  $j = 1, \dots, d$  است، اسکالر نشان داد که یک مفصل  $d$  بعدی یکتا  $C_{u_1, \dots, u_d}$  وجود دارد بطوریکه:

$$C_{u_1, \dots, u_d}(u_1, \dots, u_d) = H_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d) \quad (\text{رابطه ۱})$$

که در آن،  $u_j$  تابع توزیع تجمعی برای متغیر  $Z$  ام و همان  $H_{X_1, \dots, X_d}(x_1, \dots, x_d)$  توأم  $d$  متغیره برای مجموعه متغیره‌های  $\{X_1, \dots, X_d\}$  می‌باشد. از آنجاکه برای متغیره‌های تصادفی پیوسته، حاشیه‌ها از صفر تا یک صعودی می‌باشند، بنابراین می‌توان مفصل  $C_{u_1, \dots, u_d}$  را بعنوان تبدیل  $H_{X_1, \dots, X_d}$  از  $[-\infty, +\infty]^d$  به  $[0, 1]^d$  در نظر گرفت. لازم به توضیح است که تئوری اسکالر بصورت  $n$  بعدی پیشنهاد شده، ولی بدلیل اینکه پیچیدگی مفصل‌ها با افزایش تعداد متغیره‌ها به صورت فزاینده‌ای افزایش می‌یابد، ازین رو اغلب برای فهم روابط و مفاهیم مفصل توضیحات بر اساس مفصل‌های دومتغیره ارائه می‌گردد و نهایتاً به مراتب بالاتر تعمیم داده می‌شود (Nelsen, 2006; Salvadori et al., 2007). برای دو متغیر تصادفی و وابسته  $X$  و  $Y$ ، در صورتی که تابع توزیع تجمعی و توام این دو متغیر که به ترتیب دارای توزیع احتمال حاشیه‌ای  $F_X(x)$  و  $F_Y(y)$  می‌باشند

جدول ۱. خلاصه‌ای از مشخصات توابع مفصل مورد استفاده شامل کلایتون، علی-میخائیل-حق و فرانک

نام مفصل	تابع احتمال تجمعی مفصل $C(u, v)$	دامنه $\theta$
کلایتون	$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\theta \geq 1$
علی-میخائیل-حق	$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$-1 \leq \theta \leq 1$
فرانک	$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right]$	$\theta \neq 0$

### تحلیل وابستگی

روش‌های متداول برای بررسی وابستگی متغیرهای آب و هوایی شامل آماره همبستگی پیرسون ( $\rho$ )، آماره همبستگی اسپیرمن ( $\rho$ ) و آماره  $\tau$  کندال می‌باشند. از بین این سه روش، آماره  $\tau$  کندال به دلیل ماهیت ناپارامتری از توانایی بالاتری در توصیف وابستگی موجود بین متغیرهای هیدرولوژیکی برخوردار است (Salvadori et al., 2007). آماره  $\tau$  کندال یک روش اندازه‌گیری تطابقی ناپارامتری تعریف شده در بازه  $[-1, 1]$  بوده که در آن مقدار یک نشان دهنده وابستگی کامل، منفی یک نشان دهنده وابستگی معکوس و صفر نشان دهنده فقدان وابستگی می‌باشد. فرض کنید  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  دو مشاهده از فضای با تعداد  $n$  نمونه باشد، در این صورت  $\hat{\tau}$  را می‌توان با استفاده از رابطه زیر تخمین زد (Kao and Govindaraju, 2007).

$$\hat{\tau} = (c - d) / \binom{n}{2} \quad (\text{رابطه ۵})$$

که در آن،  $c$  بیانگر تعداد جفت‌های هم‌نوا<sup>۱</sup>  $((x_2 - x_1)(y_2 - y_1) > 0)$  و  $d$  بیانگر تعداد جفت‌های غیر هم‌نوا<sup>۲</sup>  $((x_2 - x_1)(y_2 - y_1) < 0)$  می‌باشد. لازم به تذکر است که شاخص  $\tau$  کندال برای متغیرهای تصادفی پیوسته تعریف می‌شود. بنابراین، همه جفت‌ها یا باید هم‌نوا یا غیر هم‌نوا باشند همچنین  $c + d$  برابر تعداد کل جفت‌ها می‌باشد.

با این وجود، به دلیل اینکه اغلب متغیرهای هیدرولوژیکی از جمله سیلاب به‌طور طبیعی متغیرهای تصادفی و پیوسته بوده و به‌صورت گسسته ثبت می‌گردند، در برخی موارد تعدادی از جفت‌ها نه هم‌نوا بوده و نه غیر هم‌نوا، به عبارتی جفت‌هایی که از رابطه  $((x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 0)$  پیروی می‌کنند. با این فرض خاص که امکان هم‌نوا بودن یا غیر هم‌نوا بودن یکسان است، مقدار کمیت  $(c - d)$  را می‌توان به‌صورت تفاوت مورد انتظار بین جفت‌های هم‌نوا و غیر هم‌نوا در نظر گرفت (Vandenberghe et al., 2011).

### دوره‌های بازگشت توأم<sup>۳</sup> (JRP) و شرطی<sup>۴</sup> (CJRP)

به‌منظور اجرای یک تحلیل فراوانی دومتغیره برای دو مشخصه وابسته یک پدیده هیدرولوژیکی، ابتدا با بهره‌گیری از روابط (۶) تا (۸) انواع مختلفی از آن پدیده با در نظر گرفتن دو مشخصه موردنظر (به‌عنوان مثال،  $W$  و  $V$ ) و با توجه به آستانه‌های  $w$  و  $v$  تعریف می‌گردد (Vandenberghe et al., 2011).

$$AND: \{W > w \text{ and } V > v\} \quad (\text{رابطه ۶})$$

$$OR: \{W > w \text{ or } V > v\} \quad (\text{رابطه ۷})$$

$$COND_1: \{V > v | W > w\} \quad (\text{رابطه ۸})$$

با در دست داشتن روابط فوق می‌توان فرمول‌های مربوط به دوره‌های بازگشت توأم و توأم شرطی را که در اصطلاح به آنها دوره‌های بازگشت اولیه گفته می‌شود را محاسبه نمود. شیائو (Shiau, 2003b) برای اولین روابطی را برای استخراج دوره بازگشت دومتغیره ارائه نمود. حالت کلی این معادلات در رابطه-های (۹) تا (۱۱) ارائه شده است.

$$T_{AND} = \frac{\omega_T}{1 - u - v + C_{uv}(u, v)} \quad (\text{رابطه ۹})$$

$$T_{OR} = \frac{\omega_T}{1 - C_{uv}(u, v)} \quad (\text{رابطه ۱۰})$$

$$T_{COND_1} = \frac{\omega_T}{1 - u} \cdot \frac{1}{1 - u - v + C_{uv}(u, v)} \quad (\text{رابطه ۱۱})$$

در این روابط،  $\omega_T$  بیانگر متوسط مقادیر فاصله زمانی بین آغاز دو رویداد متوالی در کل مجموعه رویدادهای مورد بررسی می‌باشد. ذکر این نکته ضروری است که با تغییر نوع تابع مفصل این امکان وجود دارد که مقادیر دوره بازگشت محاسبه شده به‌وسیله روابط فوق با هم برابر نشوند (Vandenberghe et al., 2011). در روابط (۱۲) و (۱۳) ارتباط غالب ریاضیاتی حاکم بر دوره بازگشت‌های اولیه ارائه شده است.

$$T_{OR} \leq T_{AND} \quad (\text{رابطه ۱۲})$$

$$T_{AND} \leq T_{COND_1} \quad (\text{رابطه ۱۳})$$

از روابط بالا می‌توان استنباط نمود رویدادهای با دوره بازگشت بزرگتر نسبت به آنهایی که از دوره بازگشت کوچکتری برخوردارند، حدی‌تر می‌باشند. لازم به ذکر است که از رابطه

<sup>3</sup>. Joint Return Period

<sup>4</sup>. Conditional Joint Return Period

<sup>1</sup>. Concordance

<sup>2</sup>. Discordance

(۱۲) به دفعات در مطالعات مربوط به بررسی تأثیر خصوصیات سیلاب بر سازه‌های آبی استفاده شده است (Salvadori and De Michele, 2004; Shiau, 2003a; Yue and Rasmussen, 2002).

### مفصل تجربی

بر اساس این روش، آن مفصل پارامتری که همگرایی بیشتری با مفصل تجربی داشته باشد، به‌عنوان مفصل برتر انتخاب می‌گردد (Genest and Favre, 2007). برای یک مورد دومتغیره، مفصل تجربی متناظر با داده‌های مشاهداتی  $(u_i, v_i)$  به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$C_e(u_i, v_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\left(\frac{V_i}{n+1} \leq u_i, \frac{W_i}{n+1} \leq v_i\right) \quad (\text{رابطه ۱۴})$$

که در آن،  $n$  اندازه نمونه،  $I(A)$  یک عملگر منطقی برای متغیر  $A$  بوده و برابر با صفر است اگر  $A$  برقرار نباشد و برابر یک است در صورتی که  $A$  برقرار باشد. در رابطه بالا  $V_i$  و  $W_i$  به ترتیب رتبه‌های  $i$  امین داده مشاهداتی دو مشخصه مورد بررسی (مثلاً  $V, Q_p$ ) را بیان می‌کنند. اندازه‌گیری برازش بر این اساس استوار است که نقاط به چه میزان به خط قطری نمودار پراکنش نزدیک می‌باشند. هر چه نقاط به این خط نزدیک‌تر باشند، نشان دهنده برازش مناسب‌تری است. علاوه بر نمودار پراکنش<sup>۱</sup>، این ارزیابی با بهره‌گیری از شاخص‌های آماری ریشه میانگین مربعات خطا ( $RMSE$ )، معیار اطلاعات آکائیک ( $AIC$ )، معیار نش-ساتکلیف ( $NSE$ ) و ضریب تعیین ( $R^2$ ) انجام گرفت. روابط مربوط به این شاخص‌ها به صورت زیر بیان می‌شود (Mirabbasi et al., 2012).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [C_p(i) - C_e(i)]^2} \quad (\text{رابطه ۱۵})$$

$$AIC = -2 \ln ML + 2k \quad (\text{رابطه ۱۶})$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (C_p(i) - C_e(i))^2}{\sum_{i=1}^n (C_e(i) - \bar{C}_e)^2} \quad (\text{رابطه ۱۷})$$

$$R^2 = \frac{(\sum_{i=1}^n (C_p(i) - \bar{C}_p)(C_e(i) - \bar{C}_e))^2}{\sum_{i=1}^n (C_p(i) - \bar{C}_p)^2 \sum_{i=1}^n (C_e(i) - \bar{C}_e)^2} \quad (\text{رابطه ۱۸})$$

در روابط فوق،  $n$  تعداد نمونه،  $C_p$  مقادیر محاسبه شده مفصل پارامتری،  $C_e$  مقادیر متناظر مفصل تجربی و  $\bar{C}_e$  میانگین مقادیر بدست آمده از مفصل تجربی،  $\ln ML$  حداکثر تابع لگاریتم درست نمایی و  $k$  برابر است با تعداد پارامترهای مستقل مفصل می‌باشند. مدلی از کارایی بالاتری برخوردار است که

$RMSE$  و  $AIC$  مربوط به آن به صفر نزدیک‌تر و همچنین  $NSE$  و  $R^2$  آن به یک نزدیک‌تر باشد.

### نتایج و بحث

پیش از مدل‌سازی چندمتغیره هر پدیده هیدرولوژیکی با بهره‌گیری از مفصل‌ها لازم است ابتدا تحلیل وابستگی مشخصه‌های مهم آن پدیده انجام و موارد دارای وابستگی معنی‌دار شناسایی شوند. در این مطالعه، با استفاده از شاخص‌های آماری ضریب همبستگی پیرسون ( $\rho$ )، ضریب همبستگی اسپیرمن ( $\rho_{tho}$ ) و آماره  $\tau$  کندال از بین چهار مشخصه کلیدی ۶۰ آبنمود مورد بررسی شامل حجم رواناب، دبی جریان بیشینه، زمان وقوع دبی جریان بیشینه و زمان پایه آبنمود، مشخصه‌های دارای بیشترین وابستگی مشخص گردیدند. همان‌طور که از ماتریس‌های وابستگی هر سه شاخص آماری ارائه شده در جدول (۲) می‌توان مشاهده کرد، بالاترین وابستگی بین دو مشخصه حجم سیلاب ( $V$ ) و دبی بیشینه جریان ( $Q_p$ ) وجود دارد. بطوریکه وابستگی موجود بین این دو مشخصه به ازای هر سه آماره  $\rho$ ،  $\rho_{tho}$  و  $\tau$  به ترتیب با مقادیر ۰/۷۷۱، ۰/۸۲۷ و ۰/۶۶۴ در سطح ۰/۰۱ معنی‌دار می‌باشد (زوج اول). همچنین همان‌طور که ماتریس‌های وابستگی نشان می‌دهند، بین دو مشخصه حجم سیلاب ( $V$ ) و زمان پایه آبنمود ( $t_p$ ) نیز وابستگی معنی‌داری در سطح ۰/۰۱ وجود دارد (زوج دوم). آخرین وابستگی معنی‌دار قابل شناسایی در بین چهار مشخصه مورد بررسی متعلق به دو مشخصه زمان وقوع دبی بیشینه ( $t_p$ ) و زمان پایه آبنمود رواناب ( $t_b$ ) می‌باشد (زوج سوم). بنابراین، تمرکز اصلی مطالعه حاضر بر روی مدل‌سازی توأمان این سه جفت مشخصه دارای وابستگی معنی‌دار می‌باشد. برازش و انتخاب برترین توزیع‌های تک‌متغیره یا حاشیه‌ای گام بعدی در مدل‌سازی توأمان پدیده‌های آب و هوایی با استفاده از توابع مفصل می‌باشد. در این مطالعه، برای هر چهار مشخصه  $V$ ،  $Q_p$ ،  $t_b$  و  $t_p$  انتخاب برترین توزیع حاشیه‌ای از بین توزیع‌های نرمال ( $NO$ )، لوگ نرمال ( $LN$ )، مقادیر حدی ( $EV$ )، مقادیر حدی تعمیم‌یافته ( $GEV$ )، ویبول ( $WL$ )، نمایی ( $EXP$ ) و گاما ( $GA$ ) انجام گردید. در این مطالعه، تخمین پارامتر توزیع‌های حاشیه‌ای با استفاده از روش حداکثر درست‌نمایی ( $MLE$ ) انجام گردید. همچنین انتخاب توزیع برتر با مقایسه توزیع‌های پارامتری با توزیع تجربی حاصل از رابطه ویبول و بر اساس آماره نیکوئی برازش کلموگروف-اسمیرنوف<sup>۲</sup> ( $KS$ ) انجام شد. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول (۳) برای

مفصل برتر انتخاب شد. لازم به تذکر است که پیش از بکارگیری هر تابع مفصل برای هر یک از سه زوج مشخصه موردنظر، ابتدا بایستی مقدار آماره  $\tau$  کندال مقادیر مشاهداتی با دامنه مجاز این آماره برای هر سه مفصل مقایسه و سپس در صورت ارضای شرایط اقدام به مدلسازی نمود ( Abdul Rauf and Zeepongsekul, 2014; Salvadori et al., 2007). به عنوان نمونه، دو مفصل کلایتون و فرانک برای هر دو وابستگی مثبت و منفی مناسب بوده ولی مفصل علی-میخائیل-حق فقط به ازای دامنه مشخصی از آماره وابستگی کندال ( $-0.1807 < \tau < 0.3333$ ) (Kao and Govindaraju, 2007; ) قابلیت کاربرد دارد (Mirabbasi et al., 2012).

مشخصه‌های  $V, Q_p, t_b$  و  $t_p$  توزیع‌های حاشیه‌ای برتر از بین توزیع‌های مورد بررسی به ترتیب توزیع‌های  $WL, GEV, LN$  و  $GEV$  می‌باشند.

بعد از انتخاب توزیع‌های برتر حاشیه‌ای، لازم است تابع توزیع تجمعی ( $CDF$ ) هر توزیع استخراج گردد. زیرا کارکرد اصلی توابع مفصل، اتصال  $CDF$  ها و نهایتاً ایجاد یک تابع توزیع توام می‌باشد. در این مطالعه، به جهت رعایت اختصار روابط مربوط به  $CDF$  مشخصه‌های مورد بررسی ارائه نشده است. در ادامه ارزیابی برازش سه مفصل در نظر گرفته شده در این مطالعه یعنی کلایتون، علی-میخائیل-حق و فرانک در مورد هر سه جفت مشخصه وابسته انجام گردید و نهایتاً برای هر زوج یک

جدول ۲. مقادیر ماتریس‌های وابستگی مشخصه‌های مورد بررسی بر اساس سه شاخص ضریب همبستگی پیرسون ( $\rho$ )، ضریب همبستگی اسپیرمن ( $rho$ ) و آماره  $\tau$  کندال

ماتریس وابستگی					آماره تعیین وابستگی
$\begin{pmatrix} V & Q_p & t_p & t_b \\ V & 1 & 0.771^{**} & 0.265^* & 0.571^{**} \\ Q_p & 0.771^{**} & 1 & 0.163 & 0.173 \\ t_p & 0.265^* & 0.163 & 1 & 0.339^{**} \\ t_b & 0.571^{**} & 0.173 & 0.339^{**} & 1 \end{pmatrix}$					پیرسون ( $\rho$ )
$\begin{pmatrix} V & Q_p & t_p & t_b \\ V & 1 & 0.827^{**} & 0.217 & 0.575^{**} \\ Q_p & 0.827^{**} & 1 & 0.118 & 0.219 \\ t_p & 0.217 & 0.118 & 1 & 0.432^{**} \\ t_b & 0.575^{**} & 0.219 & 0.432^{**} & 1 \end{pmatrix}$					اسپیرمن ( $rho$ )
$\begin{pmatrix} V & Q_p & t_p & t_b \\ V & 1 & 0.664^{**} & 0.135 & 0.414^{**} \\ Q_p & 0.664^{**} & 1 & 0.084 & 0.151 \\ t_p & 0.135 & 0.084 & 1 & 0.315^{**} \\ t_b & 0.414^{**} & 0.151 & 0.315^{**} & 1 \end{pmatrix}$					$\tau$ کندال

\*\* معنی داری در سطح ۰/۰۱ را نشان می‌دهد

مقادیر متناظر از مفصل تجربی برای هر سه جفت متغیر مورد بررسی مقایسه گردید. در جدول (۴) نتایج شاخص‌های  $RMSE$ ،  $AIC$ ،  $NSE$  و  $R^2$  برای مفصل‌های مورد بررسی به ازای هر یک از زوج مشخصه‌های موردنظر ارائه شده است. مقایسه عملکرد مفصل‌های مورد بررسی نشان می‌دهد برای زوج مشخصه اول یعنی حجم رواناب و دبی بیشینه آبنمود و همچنین زوج مشخصه دوم یعنی حجم رواناب و زمان پایه آبنمود رواناب هر دو مفصل کلایتون و فرانک از عملکرد مناسبی برخوردار هستند، با این وجود مفصل فرانک با حداقل مقدار دو شاخص ارزیابی  $RMSE$  و  $AIC$  و حداکثر مقدار دو شاخص  $NSE$  و  $R^2$  یک برتری جزئی نسبت به مفصل کلایتون نشان داد. چنانچه در

با توجه به مقادیر جدول (۲) مشخص است که آماره  $\tau$  کندال محاسبه شده برای سه زوج مشخصه وابسته در دامنه مجاز مفصل علی-میخائیل-حق ( $-0.1807 < \tau < 0.3333$ ) قرار نگرفته و بنابراین این مفصل از مدل‌سازی برای هر سه زوج مشخصه مورد نظر کنار گذاشته شد. بنابراین برای هر سه زوج، انتخاب مفصل برتر از بین دو مفصل کلایتون و فرانک انجام گرفت. در این مطالعه، از روش تابع استنتاج برای حاشیه‌ها ( $IFM$ ) به منظور تخمین پارامتر توابع مفصل استفاده شد. دلیل استفاده از روش مذکور سهولت پیاده‌سازی و متداول بودن در مطالعات هیدرولوژی می‌باشد ( Joe, 1997; Shiau, 2006; Shiau et al., 2007; Shiau and Modarres, 2009; Mirabbasi et al., 2012). به‌منظور انتخاب مفصل برتر، مقادیر مفصل تئوری با

احتمالات توأم و شرطی

احتمال توأم یکی از کاربردی‌ترین مفاهیم قابل ارائه به‌وسیله توابع توزیع مفصل می‌باشد. این مفهوم در موارد متعددی از جمله برآورد ریسک توأم خشکسالی، تخمین ریسک روگذری از سدها، سیستم‌های هشدار سیل و مدیریت بهنگام سیستم‌های منابع آب قابل استفاده است (Salvadori and De Michele, 2004; Yue and Rasmussen, 2002). به‌عنوان نمونه، برای دو مشخصه وابسته حجم رواناب ( $V$ ) و دبی بیشینه آبنمود ( $Q_p$ ) رابطه احتمال توأم در دو حالت  $AND$  و  $OR$  (مراجعه شود به روابط ۶ و ۷) به‌صورت روابط (۲۲) و (۲۳) بیان می‌گردد. از آنجاکه برای هر یک از زوج مشخصه مورد بررسی، ترکیبات مختلف دو مشخصه می‌تواند از احتمال مشابهی برخوردار باشد، لذا احتمالات توأم را معمولاً به‌صورت هم‌تراز نشان می‌دهند (شکل ۲ حالت  $AND$ ).

(رابطه ۲۲)

$$P(V > v \text{ AND } Q > q) = 1 - F_V(v) - F_{Q_p}(q_p) + C(F_V(v), F_{Q_p}(q_p))$$

$$P(V > v \text{ OR } Q > q) = 1 - C(F_V(v), F_{Q_p}(q_p)) \quad (\text{رابطه ۲۳})$$

جدول (۴) مشاهده می‌شود، در مورد زوج مشخصه سوم یعنی زمان وقوع دبی بیشینه و زمان پایه آبنمود رواناب نیز عملکرد هر دو مفصل مناسب بوده با این تفاوت که در مورد این زوج بر خلاف دو زوج قبلی مفصل کلایتون با یک اختلاف جزئی بر مفصل فرانک برتری نشان داد. بنابراین، در ادامه برای مدلسازی توأمان زوج مشخصه‌های اول و دوم از مفصل فرانک و برای مدلسازی توأمان زوج مشخصه سوم (زمان وقوع دبی بیشینه و زمان پایه آبنمود رواناب) از مفصل کلایتون استفاده شده است. توزیع توأم سه زوج مشخصه وابسته آبنمود رواناب بصورت زیر استخراج گردید.

(رابطه ۱۹)

$$F_{V,Q_p} = \frac{1}{9.4305} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-9.4305F_V(v)} - 1)(e^{-9.4305F_{Q_p}(q_p)} - 1)}{e^{-9.4305} - 1} \right]$$

(رابطه ۲۰)

$$F_{V,T_b} = \frac{1}{4.3564} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-4.3564F_V(v)} - 1)(e^{-4.3564F_{T_b}(t_b)} - 1)}{e^{-4.3564} - 1} \right]$$

(رابطه ۲۱)

$$F_{T_p,T_b} = (F_{T_p}(t_p)^{-1.7205} + F_{T_b}(t_b)^{-1.7205} - 1)^{\frac{1}{1.7205}}$$

جدول ۳. نتایج آزمون نیکوئی برازش کلموگروف-اسمیرن

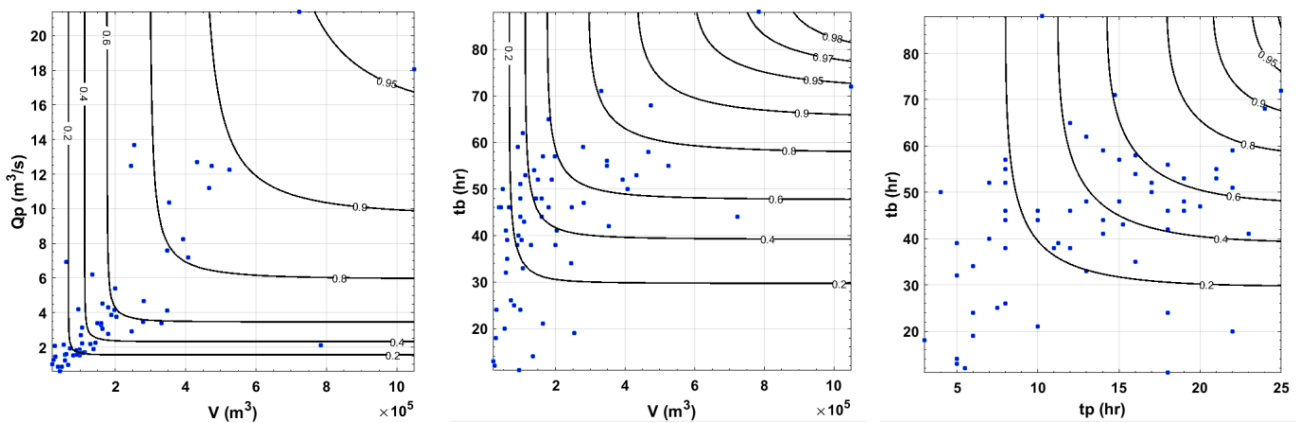
رد فرض صفر؟ (۰/۰۵)	رد فرض صفر؟ (۰/۰۱)	رتبه	آماره P-value	آماره D-max	نام توزیع	مشخصه
بله	بله	۷	۰/۰۰۸۸	۰/۲۰۷۵	NO	V
خیر	خیر	۱	۰/۹۷۶۱	۰/۰۵۸۸	LN	
خیر	خیر	۶	۰/۰۹۶۱	۰/۱۵۴۸	EV	
خیر	خیر	۲	۰/۸۶۷۴	۰/۰۷۴۰	GEV	
خیر	خیر	۳	۰/۵۴۷۵	۰/۰۹۹۵	WL	
خیر	خیر	۵	۰/۳۳۳۹	۰/۱۱۸۳	EXP	
خیر	خیر	۴	۰/۵۲۴۲	۰/۱۰۱۴	GA	
بله	بله	۷	۰/۰۰۱۲	۰/۲۴۲۹	NO	Q <sub>p</sub>
خیر	خیر	۲	۰/۳۷۷۲	۰/۱۱۴۰	LN	
بله	خیر	۶	۰/۰۲۸۷	۰/۱۸۳۳	EV	
خیر	خیر	۱	۰/۴۸۲۰	۰/۱۰۴۸	GEV	
خیر	خیر	۳	۰/۱۵۱۷	۰/۱۴۲۵	WL	
خیر	خیر	۵	۰/۰۷۰۷	۰/۱۶۲۶	EXP	
خیر	خیر	۴	۰/۰۹۴۹	۰/۱۵۵۱	GA	
خیر	خیر	۵	۰/۲۰۴۵	۰/۱۳۳۹	NO	t <sub>p</sub>
خیر	خیر	۲	۰/۳۳۵۳	۰/۱۱۸۱	LN	
خیر	خیر	۶	۰/۱۳۸۷	۰/۱۴۵۰	EV	
خیر	خیر	۳	۰/۳۰۵۰	۰/۱۲۱۳	GEV	
خیر	خیر	۱	۰/۴۷۹۵	۰/۱۰۵۰	WL	
بله	بله	۷	۶/۸۲*۱۰ <sup>-۵</sup>	۰/۲۸۵۳	EXP	
خیر	خیر	۴	۰/۲۲۲۳	۰/۱۳۱۴	GA	
خیر	خیر	۲	۰/۵۴۵۲	۰/۰۹۹۷	NO	t <sub>b</sub>
بله	خیر	۶	۰/۰۱۹۲	۰/۱۹۱۹	LN	
خیر	خیر	۵	۰/۱۰۱۹	۰/۱۵۳۳	EV	
خیر	خیر	۱	۰/۷۳۱۹	۰/۰۸۵۴	GEV	
خیر	خیر	۴	۰/۱۴۶۶	۰/۱۴۳۵	WL	
بله	بله	۷	۳/۶۶*۱۰ <sup>-۶</sup>	۰/۳۲۲۹	EXP	
خیر	خیر	۳	۰/۱۶۲۵	۰/۱۴۰۶	GA	

† مقادیر پرنگ توزیع حاشیه‌ای برتر را نشان می‌دهد



جدول ۴. مقایسه مفصل‌های مورد استفاده به تفکیک زوج مشخصه‌های وابسته

زوج مشخصه	مفصل	پارامتر	تابع لگاریتم درست نمایی	RMSE	AIC	NSE	R <sup>2</sup>
V - Q <sub>p</sub>	کلایتون	۱/۶۶۹۹	-۱۳۳۶	۰/۰۴۶۴	۲۷۳۴	۰/۹۷۱۶	۰/۹۸۶۸
	فرانک	۹/۴۳۰۵	-۱۳۵۲	۰/۰۲۴۱	۲۷۰۶	۰/۹۹۲۴	۰/۹۹۴۳
V - t <sub>b</sub>	کلایتون	۰/۹۴۸۶	-۱۳۷۷	۰/۰۳۵۳	۲۷۵۷	۰/۹۸۲۴	۰/۹۸۹۰
	فرانک	۴/۳۵۶۴	-۱۳۷۶	۰/۰۲۹۷	۲۷۵۴	۰/۹۸۷۵	۰/۹۸۷۹
t <sub>p</sub> - t <sub>b</sub>	کلایتون	۱/۷۲۰۵	-۱۳۷۴	۰/۰۴۵۴	۲۷۵۰	۰/۹۶۳۸	۰/۹۷۳۳
	فرانک	۲/۸۴۷۲	-۱۳۷۵	۰/۰۴۹۰	۲۷۵۲	۰/۹۵۷۸	۰/۹۶۷۹



شکل ۲. خطوط کنتور احتمالات توأم سه زوج مشخصه آبنمود رواناب مورد بررسی در محل ایستگاه آسنجی ولیک بن

مختلف نشان داده است. به‌عنوان نمونه، با توجه به شکل (الف)، احتمال وقوع حجم سیلابی به‌اندازه ۶۳۷/۳۵۰ هزار مترمکعب به ازای تجاوز دبی بیشینه آبنمود از ۱۳/۰۷ مترمکعب بر ثانیه برابر با ۰/۷۲۷۱ می‌باشد. همچنین با توجه به شکل (ب)، احتمال وقوع دبی بیشینه‌ای به اندازه ۱۷/۲۳ مترمکعب بر ثانیه به ازای تجاوز حجم آبنمود رواناب از ۸۴۳ هزار مترمکعب برابر با ۰/۷۰۳۵ می‌باشد.

$$P(V \leq v | Q_p \geq q') = \frac{F_{V(v)} - C(F_{Q_p}(q'), F_V(v))}{1 - F_{Q_p}(q')} \quad (\text{رابطه ۲۴})$$

$$P(Q_p \leq q | V \geq v') = \frac{F_{Q_p}(q) - C(F_{Q_p}(q'), F_V(v'))}{1 - F_V(v')} \quad (\text{رابطه ۲۵})$$

#### دوره بازگشت توأم شرطی

در این بخش از پژوهش تلاش شده است نحوه محاسبه و استخراج دوره‌های بازگشت توأم و شرطی تشریح گردد. به‌عنوان نمونه، در مورد دو مشخصه وابسته حجم رواناب (V) و دبی بیشینه آبنمود (Q<sub>p</sub>) این مفهوم را می‌توان در دو حالت دوره بازگشت شرطی حجم سیلاب با در نظر گرفتن تجاوز دبی بیشینه آبنمود از یک آستانه معین مثل q (رابطه ۲۶) و همچنین دوره بازگشت شرطی دبی بیشینه آبنمود با در نظر گرفتن تجاوز حجم سیلاب از یک آستانه معین مثل v (رابطه

یکی دیگر از مفاهیم کاربردی بدست آمده به کمک توزیع‌های توأم مفصل مبنا، مفهوم احتمال شرطی می‌باشد. به‌عنوان نمونه، در مورد دو مشخصه وابسته حجم رواناب (V) و دبی بیشینه آبنمود (Q<sub>p</sub>) این مفهوم را می‌توان در دو حالت ارزیابی توزیع احتمالاتی حجم سیلاب با در نظر گرفتن تجاوز دبی بیشینه آبنمود از یک آستانه معین مثل q' (رابطه ۲۴) و همچنین ارزیابی توزیع احتمالی دبی بیشینه آبنمود با در نظر گرفتن تجاوز حجم سیلاب از یک آستانه معین مثل v' (رابطه ۲۵) استخراج نمود. در مورد دو زوج مشخصه دیگر هم می‌توان به‌صورت مشابه روابط احتمال شرطی را استخراج کرد. در شکل (الف) توزیع احتمال شرطی حجم سیلاب به ازای تجاوز دبی بیشینه آبنمود از مقادیر مختلف، در شکل (ب) توزیع احتمال شرطی دبی بیشینه آبنمود به ازای تجاوز حجم سیلاب از مقادیر مختلف، در شکل (پ) توزیع احتمال شرطی حجم سیلاب به ازای تجاوز زمان پایه آبنمود از مقادیر مختلف، در شکل (ت) توزیع احتمال شرطی زمان پایه آبنمود به ازای تجاوز حجم سیلاب از مقادیر مختلف، در شکل (ث) توزیع احتمال شرطی زمان وقوع دبی بیشینه آبنمود به ازای تجاوز زمان پایه آبنمود از آستانه‌های مختلف و نهایتاً شکل (ج) توزیع احتمال شرطی زمان پایه آبنمود به ازای تجاوز دبی بیشینه از آستانه‌های

بیشینه از آستانه‌های مختلف نشان داده است. به‌عنوان نمونه و با توجه به شکل (۴الف) دوره بازگشت سیلابی با حجم ۵/۶۳۳۶ هزار مترمکعب به ازای تجاوز دبی بیشینه آبنمود از ۶/۰۶ مترمکعب بر ثانیه برابر ۲۱/۲۲ سال برآورد می‌گردد. همچنین با توجه به شکل (۴ب)، دوره بازگشت دبی بیشینه‌ای به اندازه ۴/۲۷۶۲ مترمکعب بر ثانیه به ازای تجاوز حجم رواناب از ۴/۲۷۶۲ هزار مترمکعب برابر ۱۳۱/۶۶ سال تخمین زده می‌شود. (رابطه ۲۶)

$$T_{V|Q_p \geq q} = \frac{E(L)}{1 - F_{Q_p}(q)} \cdot \frac{1}{1 - F_{Q_p}(q) - F_V(v) + F_{VQ_p}(v, q)}$$

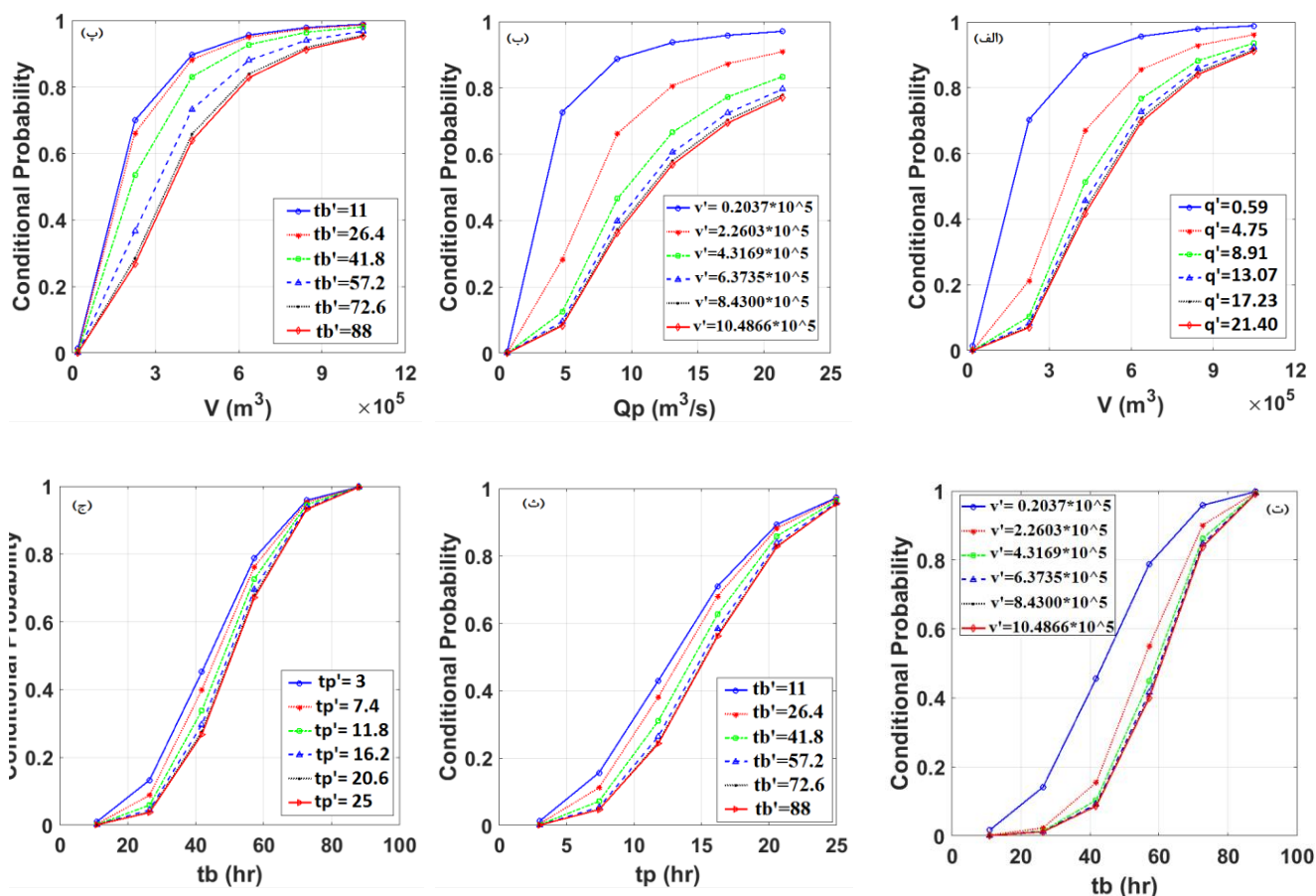
$$= \frac{E(L)}{[1 - F_{Q_p}(q)][1 - F_V(v) - F_{Q_p}(q) + C(F_V(v), F_{Q_p}(q))]}$$

(رابطه ۲۷)

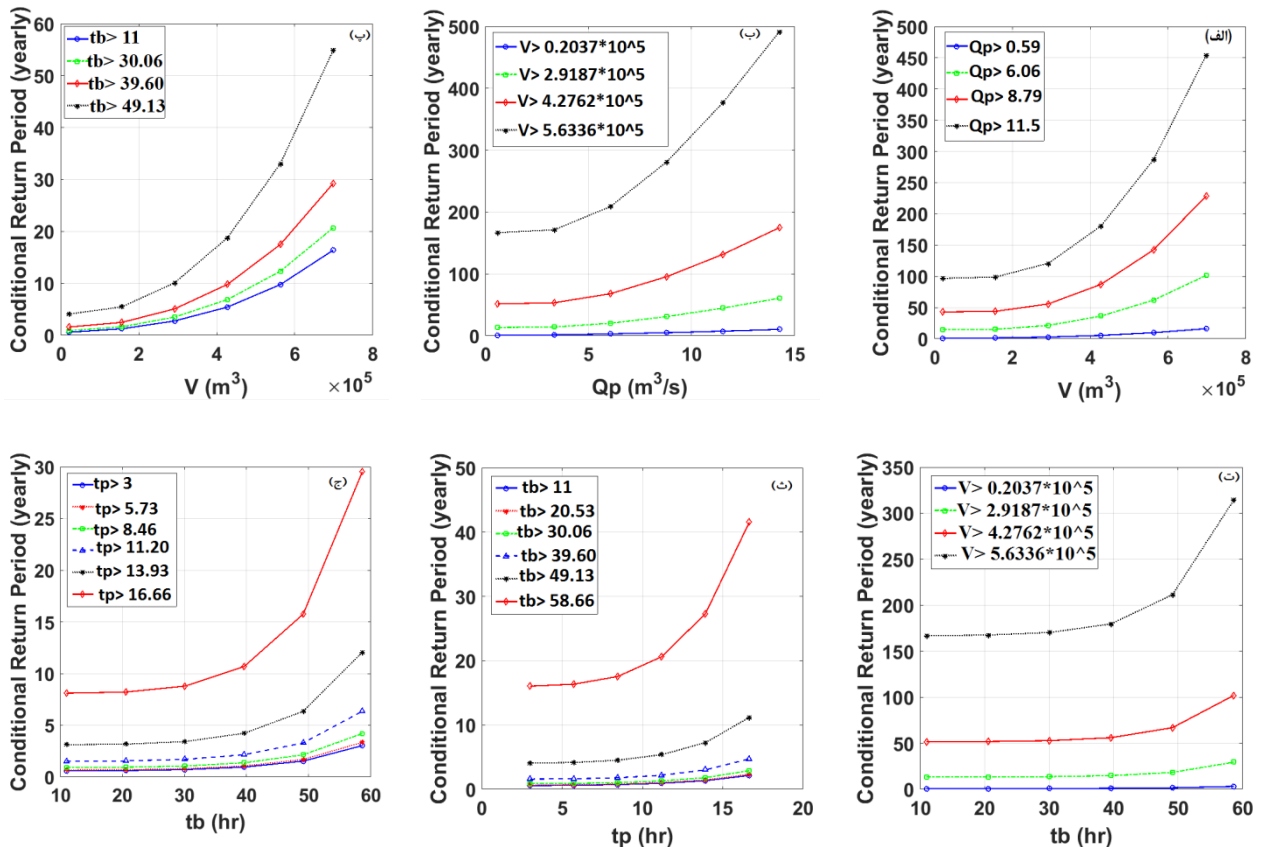
$$T_{Q_p|V \geq v} = \frac{E(L)}{1 - F_V(v)} \cdot \frac{1}{1 - F_{Q_p}(q) - F_V(v) + F_{VQ_p}(v, q)} =$$

$$\frac{E(L)}{[1 - F_V(v)][1 - F_V(v) - F_{Q_p}(q) + C(F_V(v), F_{Q_p}(q))]}$$

استخراج نمود. لازم به توضیح است که در مورد رویدادهای مورد بررسی در این مطالعه، متوسط فاصله زمانی بین آغاز دو رویداد متوالی یا  $E(L)$  برابر ۰/۵۵ سال بدست آمده است. در مورد دو زوج مشخصه دیگر هم می‌توان به‌صورت مشابه روابط دوره بازگشت شرطی را استخراج کرد. در ادامه برای هر سه زوج مشخصه وابسته، نمودارهای دوره بازگشت شرطی استخراج و ارائه شده است. در شکل (۴الف) دوره بازگشت شرطی حجم سیلاب به ازای تجاوز دبی بیشینه آبنمود از مقادیر مختلف، در شکل (۴ب) دوره بازگشت شرطی دبی بیشینه آبنمود به ازای تجاوز حجم سیلاب از مقادیر مختلف، در شکل (۴پ) دوره بازگشت شرطی حجم سیلاب به ازای تجاوز زمان پایه از مقادیر مختلف، در شکل (۴ت) دوره بازگشت شرطی زمان پایه آبنمود به ازای تجاوز حجم سیلاب از مقادیر مختلف، در شکل (۴ث) دوره بازگشت شرطی زمان وقوع دبی بیشینه آبنمود به ازای تجاوز زمان پایه آبنمود از آستانه‌های مختلف و نهایتاً شکل (۴ج) دوره بازگشت شرطی زمان پایه آبنمود به ازای تجاوز دبی



شکل ۳. نمودارهای احتمال شرطی سه زوج مشخصه وابسته آبنمود سیلاب (الف) توزیع احتمال  $V$  به شرط مقادیر مختلف  $Q_p$  (ب) توزیع احتمال  $Q_p$  به شرط مقادیر مختلف  $V$  (پ) توزیع احتمال  $V$  به شرط مقادیر مختلف  $t_b$  (ت) توزیع احتمال  $t_b$  به شرط مقادیر مختلف  $t_p$  (ث) توزیع احتمال  $t_p$  به شرط مقادیر مختلف  $t_b$  (ج) توزیع احتمال  $t_b$  به شرط مقادیر مختلف  $t_p$ .



شکل ۴. نمودارهای دوره بازگشت شرطی سه زوج مشخصه وابسته آبنمود سیلاب (الف) دوره بازگشت  $V$  به شرط مقادیر مختلف  $Q_p$  (ب) دوره بازگشت  $Q_p$  به شرط مقادیر مختلف  $V$  (ج) دوره بازگشت  $tp$  به شرط مقادیر مختلف  $t_b$  (د) دوره بازگشت  $t_b$  به شرط مقادیر مختلف  $V$  (ه) دوره بازگشت  $t_b$  به شرط مقادیر مختلف  $tp$  (و) دوره بازگشت  $tp$  به شرط مقادیر مختلف  $t_b$ .

مشخصه انجام شود. ارزیابی توابع مفصل با بهره‌گیری از مفصل تجربی و شاخص‌های ارزیابی آماری نظیر  $NSE$ ,  $AIC$ ,  $RMSE$  و  $R^2$  انجام شد. برای زوج مشخصه‌های اول و دوم مفصل فرانک و برای زوج مشخصه سوم مفصل کلاپتون بهترین برازش را از خود نشان دادند. نهایتاً توزیع‌های توأم مفصل مینا برای سه زوج مشخصه وابسته تشکیل و اطلاعات و نمودارهای ارزشمندی شامل احتمال توأم، احتمال شرطی و دوره‌های بازگشت توأم و شرطی استخراج گردید. این مطالعه در کنار مطالعات متعدد انجام شده در سطح دنیا نشان داد مفصل‌ها ابزاری کارآمد در جهت تحلیل چندمتغیره پدیده‌های آب و هوایی می‌باشند. بنابراین توصیه می‌شود پژوهشگران در جهت تحلیل پدیده‌های هیدرولوژیکی مختلف در سراسر کشور از نسخه‌های جدید آن از جمله مفصل‌های تودرتو و  $vine$  با قابلیت استفاده برای بیش از دو متغیره، استفاده نمایند.

### نتیجه‌گیری کلی

در این مطالعه، از مفصل‌ها به‌عنوان ابزاری برای تحلیل چندمتغیره و احتمالاتی پدیده رواناب استفاده گردید. پدیده مورد بررسی آبنمود رواناب و مشخصه‌های مختلف آن شامل حجم رواناب، دبی بیشینه، زمان وقوع دبی بیشینه و زمان پایه بوده است. ابتدا با استفاده از روش‌های آماری ضریب همبستگی پیرسون ( $\rho$ )، ضریب همبستگی اسپیرمن ( $rho$ ) و  $\tau$  کندانال مشخصه‌های دارای وابستگی معنی‌دار شناسایی شدند. سه زوج مشخصه شامل حجم رواناب و دبی بیشینه آبنمود (زوج اول)، حجم رواناب و زمان پایه آبنمود (زوج دوم) و زمان وقوع دبی بیشینه و زمان پایه آبنمود (زوج سوم) بالاترین مقدار وابستگی را از خود نشان دادند. سپس با برازش توزیع‌های تک متغیره مختلف بر این مشخصه‌ها، بهترین توزیع‌های حاشیه‌ای انتخاب گردیدند. در ادامه تلاش شد با استفاده از سه مفصل کلاپتون، فرانک و علی-میخائیل-حق مدل‌سازی توأم این سه زوج

### REFERENCES

- Abbasian, M. and S. Jalali (2015). Multivariate Flood Frequency Analysis Using Copula with Parametric and Nonparametric Marginal Distribution Function. *Modares Civil Engineering Journal*. 14, 81–92. (In Farsi)
- Abdul Rauf, U.F. and P. Zeepongsekul (2014). Copula based analysis of rainfall severity and duration: a case study. *Theor. Appl. Climatol.* 115, 153–166. doi:10.1007/s00704-013-0877-1

- Ahmadi, F., Mirabbasi Najafabadi, R. and F. Radmanesh (2015). Application of Joint Deficit Index (JDI) for Analyzing Droughts over the Southern Margin of the Caspian Sea. *Iran. J. Soil Water Res.* 46, 431–442. doi:10.22059/ijswr.2015.56733 (In Farsi)
- Azizabadi-Farahani, M., Bakhtiyari, B., Ghaderi, K. and M. Rezapour (2016). The Survey of Climate Change Impact on Drought Severity- Duration-Frequency Curves Using Copulas. *Iran. J. Soil Water Res.* 47, 743–754. doi:10.22059/ijswr.2016.59981 (In Farsi)
- Bacchi, B., Becciu, G. and Kottegoda (1994). Bivariate exponential model applied to intensities and durations of extreme rainfall. *J. Hydrol.* 155, 225–236. doi:10.1016/0022-1694(94)90166-X
- Bahremand, A., Alvandi, E., Bahrami, M. and M. Dashti heravi (2016). Copula functions and their application in stochastic hydrology. *Scientific Journal Management System.* 4, 1–20. doi:10.22069/ejang.2016.2793 (In Farsi)
- Bender, J., Wahl, T. and J. Jensen (2014). Multivariate design in the presence of non-stationarity. *J. Hydrol.* 514, 123–130. doi:10.1016/j.jhydrol.2014.04.017
- Chen, L., Singh, V.P., Guo, S., Zhou, J., Zhang, J., (2015). Copula-based method for multisite monthly and daily streamflow simulation. *J. Hydrol.* 528, 369–384. doi:10.1016/j.jhydrol.2015.05.018
- De Michele, C., Salvadori, G., Canossi, M., Petaccia, A. and R. Rosso (2005). Bivariate Statistical Approach to Check Adequacy of Dam Spillway. *J. Hydrol. Eng.* 10, 50–57. doi:10.1061/(ASCE)1084-0699(2005)10:1(50)
- Genest, C. and Favre, A., (2007). Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *J. Hydrol. Eng.* 12, 347–368. doi:10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(347)
- Ganjalkhani, M., Zounemat-Kermani, M., Rezapour, M., Rahnema, M.B., (2016). Evaluation of Copula Performance in Groundwater Quality Zoning (Case Study: Kerman and Ravar regions). *Iran. J. Soil Water Res.* 47, 551–560. doi:10.22059/ijswr.2016.59325 (In Farsi)
- Joe, H., (1997). Multivariate models and multivariate dependence concepts. CRC Press.
- Kao, S.-C., Govindaraju, R.S., (2008). Trivariate statistical analysis of extreme rainfall events via the Plackett family of copulas. *Water Resour. Res.* 44, 1-19. doi:10.1029/2007WR006261
- Kao, S.-C., Govindaraju, R.S., (2007). A bivariate frequency analysis of extreme rainfall with implications for design. *J. Geophys. Res. Atmospheres.* 112, 1-15. doi:10.1029/2007JD008522
- Mirabbasi Najafabadi, R., Fakheri-Fard, A., Dinpashoh, Y., Eslamian, S.S., (2014). Longterm Drought Monitoring of Urmia Using Joint Deficit Index (JDI). *Water Soil Sci.* 23, 87–103. (In Farsi)
- Mirabbasi, R., Fakheri-Fard, A., Dinpashoh, Y., (2012). Bivariate drought frequency analysis using the copula method. *Theor. Appl. Climatol.* 108, 191–206. doi:10.1007/s00704-011-0524-7
- Nelsen, R.B., (2006). An Introduction to Copulas. Springer Science & Business Media.
- Rahimi, L., Dehghani, A., Abdolhosseini, M., Ghorbani, K., (2014). Flood Frequency Analysis Using Archimedean Copula Functions Based on Annual Maximum Series (Case Study: Arazkuseh Hydrometric Station in Golestan Province). *Iranian Journal of Irrigation and Drainage.* 8, 353–365. (In Farsi)
- Requena, A.I., Chebana, F., Mediero, L., (2016). A complete procedure for multivariate index-flood model application. *J. Hydrol.* 535, 559–580. doi:10.1016/j.jhydrol.2016.02.004
- Salari, M., AkhoundAli, A.M., Adib, A., Daneshkhah, A.R., (2015). Bivariate Flood Frequency Analysis Using the Copula Functions. *Journal of Irrigation Science and Engineering.* 37, 29–38. (In Farsi)
- Salvadori, G., De Michele, C., (2004). Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resour. Res.* 40, 1-7. doi:10.1029/2004WR003133
- Salvadori, G., Michele, C.D., Kottegoda, N.T., Rosso, R., (2007). Extremes in Nature: An Approach Using Copulas. Springer Science & Business Media.
- Sanikhani, H., Mirabbasi Najafabadi, R., Dinpashoh, Y., (2014). Modeling of Temperature and Rainfall of Tabriz Using Copulas. *Irrigation and Water Engineering.* 123–133. (In Farsi)
- Serinaldi, F., Kilsby, C.G., (2013). The intrinsic dependence structure of peak, volume, duration, and average intensity of hyetographs and hydrographs. *Water Resour. Res.* 49, 3423–3442. doi:10.1002/wrcr.20221
- Shiau, J.T., Feng, S., Nadarajah, S., (2007). Assessment of hydrological droughts for the Yellow River, China, using copulas. *Hydrol. Process.* 21, 2157–2163.
- Shiau, J.T., (2006). Fitting Drought Duration and Severity with Two-Dimensional Copulas. *Water Resour. Manag.* 20, 795–815. doi:10.1007/s11269-005-9008-9
- Shiau, J.T., (2003a). Return period of bivariate distributed extreme hydrological events. *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.* 17, 42–57. doi:10.1007/s00477-003-0125-9
- Shiau, J.T., (2003b). Return period of bivariate distributed extreme hydrological events. *Stoch. Environ. Res. Risk Assess.* 17, 42–57. doi:10.1007/s00477-003-0125-9
- Shiau, J.T., Modarres, R., (2009). Copula-based drought severity-duration-frequency analysis in Iran. *Meteorol. Appl.* 16, 481–489. doi:10.1002/met.145
- Snyder, W.M., (1962). Some possibilities for multivariate analysis in hydrologic studies. *J.*

- Geophys. Res.* 67, 721–729.  
doi:10.1029/JZ067i002p00721
- Vandenberghe, S., Verhoest, N.E.C., Onof, C., De Baets, B., (2011). A comparative copula-based bivariate frequency analysis of observed and simulated storm events: A case study on Bartlett-Lewis modeled rainfall. *Water Resour. Res.* 47, 1-16. doi:10.1029/2009WR008388
- Water Resources Researches Centre of Iran (TAMAB), (2009). Hydrological and Meteorological Reports of Kasilian Watershed for the Period of 1991-92 to 2008-09. (In Farsi)
- Wong, S.T., (1963). A multivariate statistical model for predicting mean annual flood in new england. *Ann. Assoc. Am. Geogr.* 53, 298–311. doi:10.1111/j.1467-8306.1963.tb00451.x
- Yue, S., Rasmussen, P., (2002). Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts in hydrological application. *Hydrol. Process.* 16, 2881–2898. doi:10.1002/hyp.1185
- Zhang, L., Singh, V.P., (2006). Bivariate Flood Frequency Analysis Using the Copula Method. *J. Hydrol. Eng.* 11, 150–164. doi:10.1061/(ASCE)1084-0699(2006)11:2(150)