

## Performance Enhancement of the Tuller-Or model for Soil Water Characteristic Curve Via Optimization of The Soil Pore Size Distribution Parameters

MARZIEH ZARE SOURMANABAD<sup>1</sup>, SAREM NOROUZI<sup>1</sup>, FARHAD MIRZAEI<sup>1\*</sup>, HAMED EBRAHIMIAN<sup>1</sup>

1. Department of Irrigation and Reclamation Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

(Received: Dec. 14, 2020- Revised: Jan. 24, 2021- Accepted: Feb. 3, 2021)

### ABSTRACT

Models to explain water characteristic curve and liquid distribution in partially saturated porous media are abundant, mostly based on the “bundle of cylindrical capillaries” (BCC) representation of pore-space geometry. The assumptions in the BCC model are that 1- certain pore sizes are completely filled by liquid whereas larger pores are completely empty at a given saturation level and 2- the surface area and adsorbed liquid films are ignored. Tuller-Or (TO) model is among the few physical-based models that considers both the capillary and adsorption phenomena via introducing a new pore space geometry with angular central pores attached to slit-shape pores. However, the original TO model fails to describe experimental data in the intermediate saturation range because of the limited flexibility of the probability distribution invested for describing the pore size space. In this study a new enhanced form of TO model was proposed which is based on the numerical solution and is capable of using Gamma distribution for pore size distribution with arbitrary shape factor and Weibull distribution. The results obtained from the optimized model for soils with different textures showed significant improvement compared to the original model, especially in mid-range saturations whereas the original TO model shows low accuracy. The new enhanced version also includes a global search algorithm for fitting the TO model that provides unique set of fitting parameters that are independent of initial guesses.

**Keywords:** Soil Water Retention Curve, Adsorption and Capillarity, Weibull Pore Size Distribution.

## بهبود کارایی مدل تولر-آر برای منحنی مشخصه آب خاک با بهینه‌سازی پارامترهای توزیع اندازه منافذ خاک

مرضیه زارع صورمان آباد<sup>۱</sup>، صارم نوروزی<sup>۱</sup>، فرهاد میرزایی<sup>۱\*</sup>، حامد ابراهیمیان<sup>۱</sup>

۱. گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، پردیس کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۹/۲۴ - تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۵ - تاریخ تصویب: ۱۳۹۹/۱۱/۱۵)

### چکیده

مدل‌های زیادی برای توصیف منحنی مشخصه خاک تا به امروز توسعه یافته است که عموماً بر پایه فرض هندسه منافذ به صورت مجموعه‌ای از لوله‌های موئین استوانه‌ای شکل می‌باشد. در مدل‌های بر پایه لوله‌های موئین، فرض بر آنست که ۱- در یک رطوبت مشخص، قسمتی از منافذ به صورت کامل اشباع بوده، در حالی که منافذ با اندازه بزرگتر کاملاً خشک می‌باشند، ۲- در این مدل‌ها، اثر سطح ویژه و نیروهای جذب سطحی نادیده گرفته می‌شود. مدل تولر-آر از معدود مدل‌های فیزیکی است که هر دو جزء نیروهای موئینگی و جذب سطحی را در یک هندسه جدید متشکل از یک منفذ مرکزی و شکاف‌های متصل به آن برای منافذ خاک، توصیف می‌کند. با این حال، مدل اصلی تولر-آر از دقت مناسبی در ناحیه رطوبتی‌های میانی برخوردار نیست که علت عمده آن، محدودیت عمده تابع احتمالاتی بکار رفته برای توصیف منافذ خاک می‌باشد. در پژوهش حاضر نسخه بهبود یافته‌ای از مدل تولر-آر بر مبنای حل عددی ارائه می‌گردد که دارای قابلیت استفاده از توزیع گاما با ضریب شکل اختیاری و توزیع ویبال می‌باشد. نتایج بدست آمده از مدل بهینه شده برای چهار خاک با بافت متفاوت، حاکی از بهبود قابل توجه در نسخه جدید نسبت به مدل اولیه تولر-آر به ویژه در رطوبت‌های میانی است که در این ناحیه مدل اولیه تولر-آر از دقت مناسبی برخوردار نمی‌باشد. همچنین نسخه بهبود یافته از یک الگوریتم بهینه‌سازی سراسری استفاده می‌کند که جواب‌های نهایی منحصر به فرد و مستقل از حدس اولیه می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** منحنی نگهداشت آب خاک، جذب سطحی و موئینگی، توزیع اندازه منافذ ویبال.

### مقدمه

بخش غیراشباع خاک به عنوان رابط بین ناحیه ریشه و اتمسفر اهمیت فراوانی در چرخه آب دارد. مدل‌سازی و توصیف فرآیندهای انتقال آب و املاح در ناحیه غیراشباع خاک وابسته به دقت مدل‌های ریاضی بکار گرفته شده برای توصیف منحنی مشخصه آب خاک<sup>۱</sup> و همچنین هدایت هیدرولیکی غیراشباع است. منحنی مشخصه آب خاک، رابطه بین میزان رطوبت خاک و پتانسیل ماتریک است که ظرفیت و توانایی خاک در نگهداشت آب را نشان می‌دهد که خود کنترل‌کننده بسیاری دیگر از پدیده‌های درون خاک بوده و در بسیاری از پژوهش‌ها به عنوان اطلاعات پایه مورد استفاده قرار می‌گیرد (Sadeghi et al., 2012). تا به امروز طیف وسیعی از مدل‌های پارامتریک (با ضرایب تجربی) برای بیان ریاضی منحنی مشخصه رطوبتی خاک و هدایت هیدرولیکی غیراشباع به صورت مجزا از یکدیگر توسعه یافته‌اند که بسته به ناحیه‌ای که بین دو حد خاک در حالت خشک و یا تر را مدل‌سازی

می‌کنند، می‌توانند محدود به ناحیه خاصی بوده و یا کل ناحیه بین تر و خشک را شامل شوند (Khlosi et al., 2008; Peters and Durner, 2008). این مدل‌ها شامل مدل‌های ساده‌تر (از لحاظ ریاضی) با توزیع اندازه منافذ تک‌قله‌ای<sup>۲</sup> (Leij et al., 1997) و همچنین مدل‌های پیچیده‌تر دو قله‌ای (Othmer et al., 1991; Ross and Smettem, 1993; Durner, 1994) می‌باشد. با این حال عموماً به علت در دسترس نبودن اندازه‌گیری‌های هدایت هیدرولیکی غیراشباع، استقبال زیادی برای استفاده از این نوع مدل‌ها نشده است.

از آنجا که اندازه‌گیری منحنی مشخصه خاک نسبت به اندازه‌گیری هدایت هیدرولیکی غیراشباع ساده‌تر است، روش‌های جایگزینی ارائه گردیده است که در آن سعی در استخراج منحنی هدایت هیدرولیکی غیراشباع خاک بر اساس منحنی مشخصه رطوبتی خاک می‌باشد. در این دسته از مدل‌ها که به مدل‌های آماری<sup>۳</sup> معروف هستند ابتدا یک فرض انتزاعی<sup>۴</sup> برای شکل منافذ خاک صورت گرفته (منافذ با مقاطع دایره‌ای شکل یا زاویه‌دار) و

\* نویسنده مسئول: fmirzaei@ut.ac.ir

1 Soil water retention curve

2 Unimodal distributions

3 Statistical models

4 Conceptual

(با ضرایب تجربی) از مزایای عمده مدل تولر-آر آن است که تمام مولفه‌های برازشی مدل دارای تفسیر فیزیکی بوده و منعکس کننده خصوصیات فیزیکی و هیدرولیکی خاک می‌باشند.

در ادامه، (Tuller *et al.*, 1999) با استفاده از فرض توزیع اندازه منافذ خاک به صورت توزیع احتمالاتی گاما<sup>۲</sup>، مدل ارائه شده برای یک منفذ را به یک نمونه خاک تعمیم داده‌اند. مدل تولر-آر تنها برای حالت بسیار خاصی از توزیع اندازه منافذ گاما و با فرض ضریب شکل برابر با ۲ توسعه داده شده است که همین امر باعث پایین آمدن انعطاف‌پذیری این مدل در ناحیه رطوبت-های بینابینی شده است (Lebeau and Konrad, 2010).

هدف از پژوهش حاضر، ارائه چهارچوبی جدید و جامع بر مبنای حل عددی مدل تولر-آر می‌باشد، به گونه‌ای که محدودیت حل تحلیلی (که منحصر به حالت خاصی از توزیع گاما می‌باشد) رفع شده و هر نوع تابع توزیع احتمالاتی دیگر برای اندازه منافذ همچون توزیع گاما در حالت کلی، توزیع ویبال<sup>۳</sup>، گامای ناقص<sup>۴</sup> و دیگر توزیع‌های موجود را بتوان در نظر گرفت. همچنین در مدل بهبود یافته تولر-آر، از یک الگوریتم بهینه‌سازی سراسری<sup>۵</sup> استفاده می‌شود که برخلاف مدل اولیه تولر-آر، مجموعه جواب نهایی وابسته به حدس اولیه نخواهد بود. به منظور ارزیابی مدل تعمیم یافته جدید، چهار بافت خاک در محدوده شن تا رس انتخاب گردیده که از لحاظ خصوصیات فیزیکی و هیدرولیکی با یکدیگر اختلاف دارند.

## مواد و روش‌ها

### معرفی مدل تولر-آر برای منحنی مشخصه رطوبتی خاک

مدل نگهداشت مایع و سطح تماسی مایع-بخار در مقیاس منفذ (Tuller *et al.*, 1999) مدلی برای نگهداشت مایع و سطح تماسی مایع-بخار<sup>۶</sup> در منافذ زاویه‌داری که متصل به منافذ شکاف‌دار هستند و برای حالت رطوبت متغیر (نیمه اشباع)، ارائه نمودند. مدل ارائه شده بر مبنای تئوری یانگ-لاپلاس الحاقی<sup>۷</sup> (AYL) در هندسه مفروض می‌باشد. بر مبنای تئوری یانگ-لاپلاس الحاقی، پتانسیل شیمیایی (مکش) متشکل از دو جزء موئینگی ( $C(\kappa)$ ) و جذب سطحی ( $A(h)$ ) می‌باشد:

$$\mu = A(h) + C(\kappa) \quad (\text{رابطه ۱})$$

که در آن  $h$  ضخامت لایه نازک مایع در حالت جذب سطحی

سپس با حل معادلات جریان در هندسه مورد مطالعه، هدایت هیدرولیکی غیراشباع را در منفذ مورد مطالعه محاسبه نموده و سپس با فرضی آماری برای طیف اندازه منافذ خاک، نتایج را از حالت مقیاس منفذ به حالت نمونه خاک (شامل تمامی اندازه‌های منفذ موجود در یک نمونه خاک) تعمیم می‌دهند.

عموم مدل‌های توسعه یافته در روش‌های آماری براساس نمایش هندسه فضای منفذ به عنوان "مجموعه‌ای از لوله‌های موئین" (BCC)<sup>۱</sup> هستند (Milington and Quirk, 1961; Mualem, 1976a). در مدل‌های BCC این فرض وجود دارد که اندازه‌های منفذ خاصی به طور کامل توسط مایع اشغال بوده در حالی که منافذ بزرگ‌تر در یک مکش مشخص کاملاً خالی هستند. چنین فرض غیرواقعی از نحوه تر و خشک شدن منافذ خاک (که در واقعیت فرآیندی تدریجی است) و همچنین محدود نمودن جریان درون خاک به حالت موئینگی و صرف نظر نمودن از نیروهای جذب سطحی منجر به کاهش دقت مدل‌های BCC در مدل‌سازی ناحیه خشک منحنی مشخصه رطوبتی و به تبع آن کاهش دقت منحنی هدایت هیدرولیکی مستخرج شده از آن گردیده است (Lebeau and Konrad, 2010).

به منظور غلبه بر مشکلات ذکر شده در مدل‌های BCC، در مدل‌سازی رفتار مایع در محیط نیمه‌اشباع (Tuller *et al.*, 1999) (در ادامه به اختصار "تولر-آر") یک چارچوب جایگزین ارائه کردند که خود شامل دو بخش می‌باشد: (۱) یک روش واحد برای در نظر گرفتن مستقیم سهم نیروهای جذب سطحی و موئینگی در پتانسیل ماتریک (Philip, 1997) و (۲) تعمیم و بکارگیری چهارچوب ارائه شده در قبل، در یک هندسه منفذ جدید (سلول واحد) متشکل از یک منفذ مرکزی گوشه‌دار برای فرایندهای موئینگی که به فضاهای شکاف-شکل با سطح ویژه بالا برای فرایندهای جذب سطحی متصل است. از مزایای مدل ارائه شده جدید، امکان در نظر گرفتن منافذ گوشه‌دار است که باعث می‌شود برخلاف مدل BCC منافذ خاک تنها به حالت خشک و یا تر نباشند و در هر مکشی هر یک از منافذ همواره درصدی از رطوبت را در خود نگه دارد. همچنین اضافه شدن شکاف‌ها با سطح ویژه بالا در این مدل که نیروهای جذب سطحی را دخیل می‌نمایند، باعث شده است که دقت مدل در شبیه‌سازی ناحیه خشک منحنی مشخصه که نیروهای جذب سطحی غالب هستند، به طرز چشمگیری افزایش پیدا کند. برخلاف مدل‌های پارامتری

6 Liquid vapor interfacial  
7 Augmented Young-Laplace

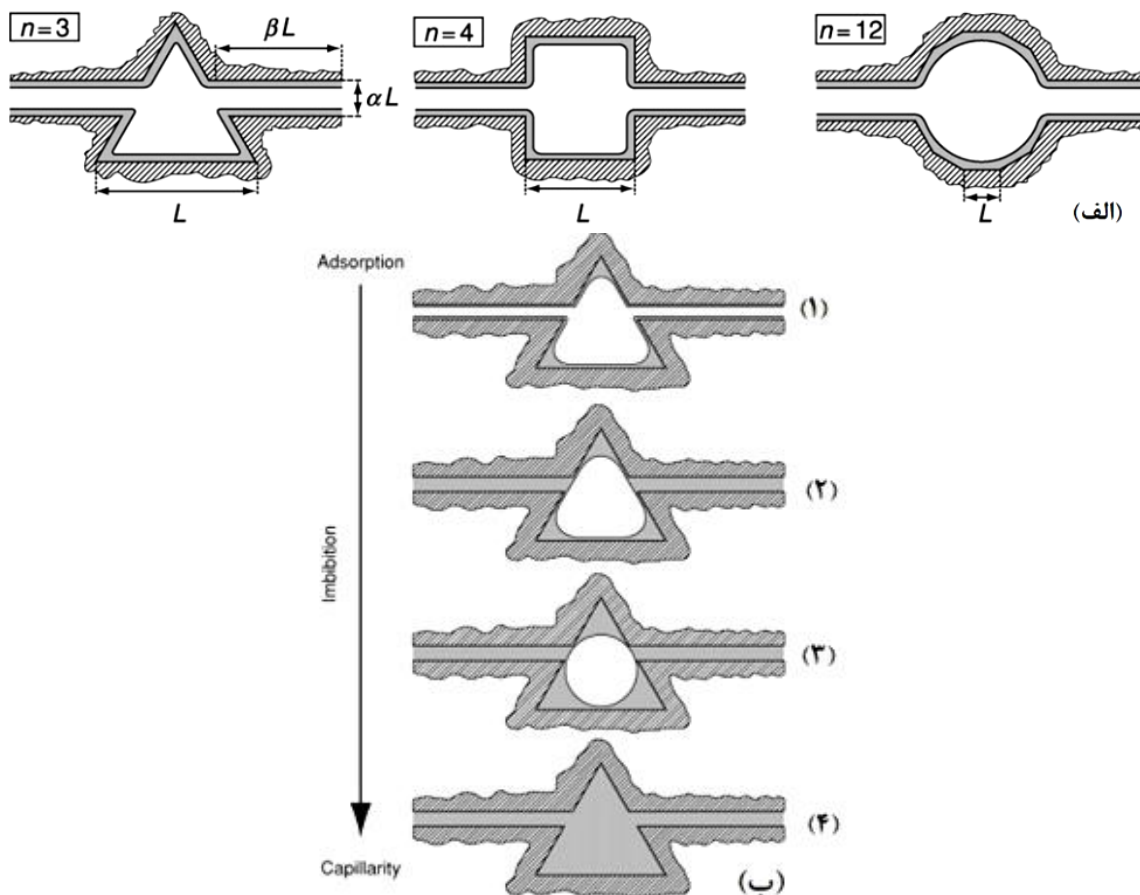
1 Bundle of cylindrical capillaries  
2 Gamma distribution  
3 Weibull distribution  
4 Incomplete gamma distribution  
5 Global optimization

هندسه جدید برای شکل منافذ (سلول واحد) تجمع ذرات اولیه با اشکال نامنظم، عامل اصلی در شکل‌گیری فضای منافذ محیط‌های متخلخل می‌باشد که منجر به تشکیل منافذ زاویه‌دار و شکاف- شکل<sup>۲</sup> می‌شود. (Tuller et al., 1999) هندسه جدیدی برای منافذ خاک ارائه نمودند که به شکل منافذ واقعی نزدیک‌تر می‌باشد. سلول واحد پیشنهادی که در شکل (۱) نشان داده شده‌است، از یک منفذ مرکزی به شکل چندضلعی برای فرایندهایی که در آن‌ها موئینگی غالب است و فضاهای شکاف- شکل دارای سطح داخلی، برای در نظر گرفتن فرآیندهای جذب سطحی غالب، تشکیل شده‌است.

و  $\kappa$  میانگین انحنای سطح تماس مایع- بخار در گوشه‌های زاویه- دار منافذ است. در رابطه AYL عبارت جذب سطحی (با در نظر گرفتن اثر نیروهای واندروالسی) به صورت ذیل بیان می‌شود:

$$\mu = \frac{A_{svl}}{6\pi\rho h^3} - \frac{2\sigma\kappa}{\rho} \quad (\text{رابطه ۲})$$

ثابت هاماکر<sup>۱</sup> برای اندرکنش بین فاز جامد و بخار از طریق مایع واسط،  $\rho$  چگالی مایع و  $\sigma$  کشش سطحی مایع است. از آنجا که ضریب  $A_{svl}$  همواره کمتر از صفر است، در رابطه (۲) میزان مکش ( $\mu$ ) منفی خواهد بود.



شکل ۱- الف) هندسه منافذ ارائه شده توسط Tuller et al., (1999) متشکل از یک منفذ مرکزی و شکاف‌های متصل به آن - ب) مراحل تدریجی اشباع شدن منافذ مرکزی و شکاف متصل به آن (Tuller and Or, 2001)

بیان دیگر انتظار می‌رود که محیط‌های متخلخل با منافذ درشت سطح ویژه کمتری داشته باشند. با توجه به شکل (۱)، هر منفذ، با یک چندضلعی از درجه  $n$  برای منفذ مرکزی و ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $L$  شناخته می‌شود. حجم و جرم ذرات جامد احاطه کننده منافذ نیز با استفاده از میزان تخلخل و چگالی ذرات قابل محاسبه خواهد بود.

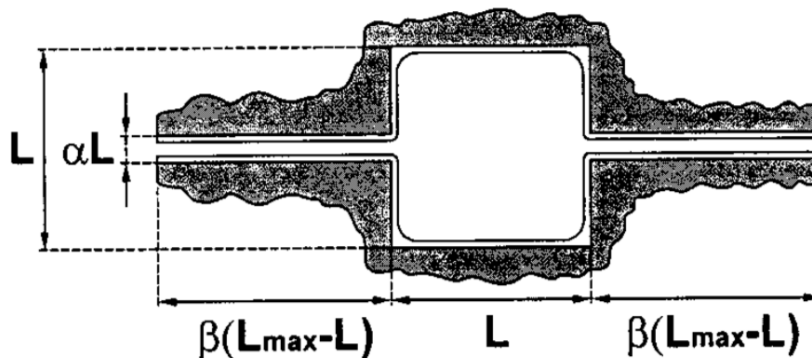
فاصله شکاف مضربی از طول منفذ مرکزی ( $L$ ) بوده و به صورت  $\alpha L$  بیان می‌شود. اگرچه طول شکاف نیز به روش مشابهی به صورت مضربی از طول منفذ مرکزی ( $\beta L$ ) تعریف می‌گردد، اما بدیهی است که طول شکاف (که عامل اصلی در سطح ویژه منافذ است)، باید رابطه‌ای معکوس با طول منفذ مرکزی داشته باشد. به

1 Hamaker constant  
2 Slit shape

برای اشکال مختلف منفذ مرکزی توسط Or and Tuller, (1999) ارائه گردیده است.

روش تعمیم درجه اشباع در مقیاس منفذ به مقیاس نمونه (خاک) Or and Tuller (1999) پس از استخراج معادلات مربوط به درجه اشباع به عنوان تابعی از مکش، برای هندسه منفذ ارائه شده در شکل (۱) نتایج را با فرض یک توزیع احتمالاتی آماری برای طیفی از اندازه منافذ، به یک نمونه خاک تعمیم دادند. در مدل مقیاس نمونه خاک، فرض بر آن است که خاک متشکل از طیفی از اندازه منافذ بین  $L_{min}$  تا  $L_{max}$  بوده که در طی فرآیند تر شدن (یا خشک شدن) در یک مکش مشخص سه حالت می‌تواند رخ دهد: (۱) منافذ دارای اندازه بین  $L_{min}$  تا  $L_1$  که در آن هم منفذ مرکزی و هم شکاف متصل به آن اشباع کامل هستند، (۲) منافذ دارای اندازه بین  $L_1$  تا  $L_2$  که منفذ مرکزی هوادار گردیده ولی شکاف‌های متصل به آن همچنان اشباع هستند، (۳) منافذ دارای اندازه بین  $L_2$  تا  $L_{max}$  که هم منفذ مرکزی و هم شکاف متصل به آن هوادار می‌باشند. کران‌های  $L_1$  تا  $L_2$  هر دو تابعی از مکش می‌باشند.

Or and Tuller, (1999) رابطه معکوس بین طول شکاف و طول منفذ مرکزی را با اصلاح جزئی شکل منفذ نشان داده شده در شکل (۱)، رفع نموده‌اند (شکل ۲). همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود طول شکاف در هندسه جدید به صورت  $\beta(L_{max}-L)$  بیان می‌گردد. در واقع برای منافذ با اندازه منفذ مرکزی بزرگتر، طول شکاف کوچکتر خواهد بود.



شکل ۲- هندسه منفذ نهایی (اصلاح شده) که در آن طول شکاف رابطه معکوس با طول منفذ مرکزی دارد.

$$S_{w2}(\mu) = \int_{L_1}^{L_{max}} \frac{r(\mu)^2 F_n}{2\alpha\beta L(L_{max}-L) + A_n L^2} f(L) dL \quad (ج-۵)$$

$$S_{w3}(\mu) = \int_{L_1}^{L_2} \frac{2\alpha\beta L(L_{max}-L)}{2\alpha\beta L(L_{max}-L) + A_n L^2} f(L) dL \quad (د-۵)$$

$$S_{w4}(\mu) = \int_{L_1}^{L_2} \frac{nLh(\mu)}{2\alpha\beta L(L_{max}-L) + A_n L^2} f(L) dL \quad (ه-۵)$$

$$(و-۵)$$

$$S_{w5}(\mu) = \int_{L_2}^{L_{max}} \frac{h(\mu)\{4\beta(L_{max}-L) + n[L-h(\mu)]\}}{2\alpha\beta L(L_{max}-L) + A_n L^2} f(L) dL$$

درجه اشباع بعنوان تابعی از پتانسیل شیمیایی در مقیاس منفذ (1999) Tuller et al. با انجام ساده‌سازی‌هایی در رابطه AYL و با بکارگیری آن در هندسه منفذ شکل (۱)، درجه اشباع نسبی را در مقیاس یک منفذ محاسبه نمودند. در روش ساده شده که SYL نامیده می‌شود، شعاع انحنا مایع در گوشه‌های منفذ مرکزی با استفاده از رابطه کلاسیک یانگ-لاپلاس  $r(\mu) = -\sigma/(\rho\mu)$  محاسبه گردیده که تنها تابعی از موئینگی می‌باشد. اثر درجه اشباع به علت حضور نیروهای جذب سطحی نیز توسط لایه نازک مایع تشکیل شده در سطح منفذ و به صورت ذیل محاسبه می‌گردد:

$$h(\mu) = \sqrt[3]{\frac{A_{svl}}{6\pi\rho\mu}} \quad (\text{رابطه ۳})$$

که در آن  $\mu$  پتانسیل آب خاک می‌باشد. در نهایت شکل مایع درون منفذ که متشکل از هلال‌های موئینگی است که به اندازه  $h$  جابجا گردیده و شکل نهایی مایع درون منفذ را بدست می‌دهد (شکل ۱-ب). پر شدن ناگهانی منفذ مرکزی در هنگام تر شدن زمانی رخ می‌دهد که سطح هلالی شکل مایع - بخار از گوشه‌های منفذ به هم نزدیک شده تا آنجا که یک دایره محاط با شعاع مشخص تشکیل شود که این شعاع ترشدگی از رابطه ذیل محاسبه می‌گردد:

$$r_{imb} = \frac{2A}{P} = \frac{2A_n L}{n} \quad (\text{رابطه ۴})$$

که در آن  $P$  محیط منفذ مرکزی ( $nL$ )،  $n$  تعداد گوشه‌های منفذ مرکزی و  $A_n$  فاکتور مساحت بوده که در روش محاسبه آن

معادلات ارائه شده به منظور محاسبه درجه اشباع به عنوان تابعی از مکش برای یک نمونه خاک به صورت ذیل می‌باشد:

(۵-الف)

$$S_w(\mu) = S_{w1}(\mu) + S_{w2}(\mu) + S_{w3}(\mu) + S_{w4}(\mu) + S_{w5}(\mu)$$

$$S_{w1}(\mu) = \int_{L_{min}}^{L_1} f(L) dL \quad (۵-ب)$$

از پارامترهای برازشی مکش ورود هوا به خاک<sup>۳</sup> است که خود تعیین کننده مقدار  $L_{max}$  می‌باشد. رابطه بین بزرگترین اندازه منفذ و مکش ورود هوا به خاک توسط رابطه ذیل تعیین می‌گردد: (رابطه ۸)

$$L_{max} = L_1(\mu_d) + 2h(\mu_d) = -\frac{\sigma}{\rho\mu_d} C_n + 2\sqrt[3]{\frac{A_{svl}}{6\pi\rho\mu_d}}$$

که  $\mu_d$  مکش ورود هوا به خاک می‌باشد. همچنین کوچکترین اندازه منفذ برابر با مقدار اختیاری  $10^{-9}$  متر فرض می‌شود.

### تعمیم مدل تولر-آر به توزیع اندازه منافذ ویبال و گاما با ضریب شکل اختیاری

همانطور که در رابطه (۵) مشخص است، توزیع اندازه منافذ خاک نقش کلیدی در درجه اشباع منافذ نهایی خاک دارد. Or and Tuller (1999) با فرض توزیع اندازه منافذ خاک به حالت خاصی از توزیع گاما (فرض ضریب شکل برابر با ۲)، معادلات (۵) را حل نموده و برای این حالت خاص از توزیع اندازه منافذ، جواب‌های فرم بسته و تحلیلی ارائه نمودند.

در پژوهش حاضر یک چهارچوب بهینه‌سازی برای مدل تولر-آر بر مبنای حل عددی ارائه می‌گردد که امکان استفاده از هر نوع توزیع اندازه منفذ وجود داشته و همچنین به علت استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی سراسری<sup>۴</sup> (Ugray et al., 2007) مجموعه ضرایب برازشی نهایی، متاثر از مقدار حدس اولیه (نقطه شروع بهینه‌سازی) نمی‌باشد.

تابع هدف به منظور برازش مدل تولر-آر به مقادیر اندازه-گیری شده منحنی مشخصه رطوبتی به صورت ذیل می‌باشد: (رابطه ۹)

$$\text{minimize } w_1 \sum_{i=1}^n (Sw_m - Sw_e)^2 + w_2 \left[ \int_{L_{min}}^{L_{max}} f(L) dL - 1 \right]^2$$

عبارت اول در رابطه فوق، بیانگر اختلاف بین مقادیر اندازه-گیری شده درجه اشباع ( $Sw_m$ ) و پیش‌بینی شده ( $Sw_e$ ) بر روی منحنی مشخصه رطوبتی است. عبارت دوم در سمت راست نیز بیانگر آن است که در طی بهینه‌سازی، ضرایب برازشی در منحنی توزیع اندازه منافذ بگونه‌ای بدست آیند تا در نهایت سطح زیر منحنی توزیع اندازه منافذ به مقدار یک همگرا گردد. همچنین ضرایب  $w_1$  و  $w_2$  در رابطه (۹) ضرایب وزنی هستند که مقدار آن‌ها در این پژوهش برابر با یک فرض شد. برای محاسبه  $Sw_e$  روابط (۵الف) تا (۵و) از قاعده سیمپسون استفاده گردیده است. از آنجا

همانطور که در رابطه (۵الف) مشاهده می‌شود، درجه اشباع نهایی  $Sw$  (حاصل تقسیم رطوبت بر رطوبت اشباع) خود متشکل از پنج جزء می‌باشد. در معادلات (۵ب) تا (۵و) عبارت  $f(L)$  درون انتگرال بیانگر توزیع اندازه منفذ بوده و هر یک از کسرهای داخل انتگرال‌ها، درجه اشباع در یک منفذ با طول منفذ مرکزی مشخص را نشان می‌دهد.  $Sw_1$  درجه اشباع آن دسته از منافذی است که بین  $L_{min}$  تا  $L_1$  قرار داشته و درجه اشباع در این منافذ برابر با یک می‌باشد، زیرا هم منفذ مرکزی و هم شکاف متصل به آن هنوز هوادار نشده‌اند. عبارت  $Sw_2$  مقدار نگهداشت رطوبت در اثر نیروهای موئینگی در منفذ مرکزی را نشان می‌دهد که در گوشه‌های زاویه‌دار منفذ مرکزی و بعد از هوادار شدن منفذ تشکیل می‌شود. عبارت  $Sw_3$  نیز میزان رطوبت درون شکاف‌هایی را نشان می‌دهد که همچنان به صورت کاملاً پر بوده و هنوز هوادار نشده‌اند. عبارت  $Sw_4$  در رابطه (۵ه) مقداری بسیار ناچیز و نزدیک به صفر می‌باشد که بیانگر لایه نازک آب در منفذ مرکزی و در اثر نیروهای جذب سطحی است. در نهایت عبارت  $Sw_5$  در رابطه (۵و) مقدار درجه اشباع مورد انتظار در اثر لایه نازک آبی است که شکاف‌های نیمه اشباع را پوشانده است.

همانطور که در شکل (۲) مشاهده می‌شود اگر در مدل تولر-آر منفذ مرکزی دارای طول  $L$  با توزیع  $f(L)$  باشد، فاصله شکاف ( $\alpha L$ ) نیز دارای توزیع متناظر  $f(\alpha L)$  خواهد بود که آن را توزیع توام<sup>۱</sup> می‌نامند. پارامتر  $\alpha$  خود از پارامترهای برازشی نبوده بلکه از طریق رابطه (۶) به کمیت  $\varepsilon$  ارتباط پیدا می‌کند که  $\varepsilon$  پارامتر برازشی بوده و بیانگر میزان هم‌پوشانی توزیع‌های اندازه منفذ مرکزی ( $L$ ) و توزیع توام ( $\alpha L$ ) می‌باشد:

$$\alpha = m(L)/L_{max}\varepsilon \quad (\text{رابطه ۶})$$

که در آن  $m(L)$  میانگین سایز منفذ و  $L_{max}$  بزرگترین سایز منفذ روی منحنی اندازه منافذ می‌باشد. ضریب طول شکاف ( $\beta$ ) نیز یک پارامتر برازشی مدل تولر-آر بوده که بسیار وابسته به مقدار سطح ویژه<sup>۲</sup> نمونه خاک اندازه‌گیری شده می‌باشد. مقدار سطح ویژه پیش‌بینی شده در مدل تولر-آر که یکی از قیود اساسی در برازش مدل است، به صورت ذیل محاسبه می‌شود: (رابطه ۷)

$$SA_e = \int_{L_{min}}^{L_{max}} \left[ \frac{4\beta(L_{max} - L) + nL}{2\alpha\beta L(L_{max} - L) + A_n L^2} \phi_T \right] f(L) dL$$

در رابطه (۷) عبارت موجود در صورت کسر داخل انتگرال، سطح داخلی منفذ (در حالت دو بعدی)، مخرج کسر حجم کل منفذ و  $\phi_T$  تخلخل می‌باشد. همچنین در مدل تولر-آر، یکی دیگر

3 Potential at air entry  
4 Global optimization

1 Joint distribution  
2 Specific surface area

مدل بر شکل کلی تابع را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، چولگی<sup>۱</sup> تابع توزیع گاما تنها تابعی از ضریب شکل ( $\xi$ ) می‌باشد. تابع توزیع گاما همانطور که در شکل (۳) مشاهده می‌شود، به علت محدود بودن پارامتر  $\xi$  به اعداد صحیح، از انعطاف-پذیری کمتری برخوردار می‌باشد. به علت غلبه بر مشکل فوق، در پژوهش حاضر علاوه بر تابع توزیع گاما با ضریب شکل اختیاری، تابع توزیع ویبال که قبلاً موفقیت آن در مدل‌سازی‌های بر پایه فرض BCC نشان داده شده است (Assouline et al., 1998) نیز مورد بررسی قرار گرفت. فرم کلی تابع چگالی احتمالاتی ویبال به صورت ذیل می‌باشد:

$$f(L) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{L}{\lambda}\right)^k\right] \quad L \geq 0. \quad (\text{رابطه } 12)$$

که در آن  $k$  پارامتر شکل و  $\lambda$  پارامتر مقیاس<sup>۲</sup> نامیده شده و هر دو بزرگتر از صفر می‌باشند.

همانطور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود، فرم کلی توزیع ویبال بسیار منعطف‌تر از توزیع گاما (شکل ۳) می‌باشد. شکل توزیع ویبال با افزایش پارامتر  $k$  به سمت توزیع نرمال میل می‌کند. زمانی که  $0 < k < 1$  باشد، تابع چگالی با نزدیک شدن مقدار  $L$  به صفر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. از آنجایی که در این حالت توان  $L$  یعنی  $k-1$ ، در تابع چگالی منفی است ( $k < 1$ )، نمودار آن به صورت نزولی است. در چنین حالتی، شیب منحنی در نزدیکی  $L=0$ ، منفی بی‌نهایت است.

که سرعت انجام محاسبات در نرم افزار Matlab و به ویژه در حل معکوس برای یافتن ضرایب برازشی، بسیار وابسته به تعداد نقاط گسسته‌سازی در روش عددی می‌باشد، تعداد ۱۰۰۰ نقطه برای گسسته‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تابع هدف (رابطه ۹) با قیود بهینه‌سازی ذیل همراه می‌باشد:

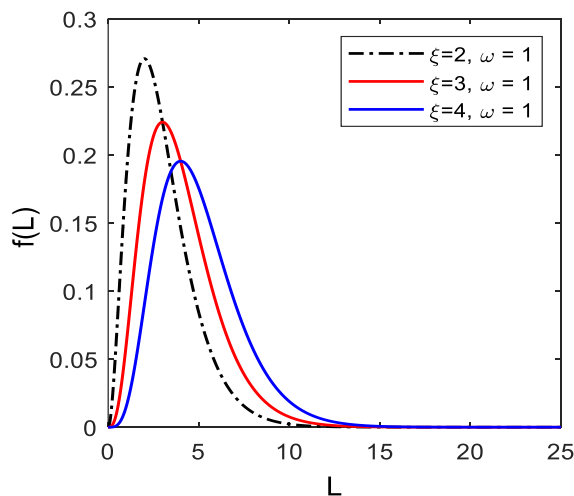
$$SA_{lower} < SA_e < SA_{upper} \quad (\text{رابطه } 10)$$

$$\beta > 0$$

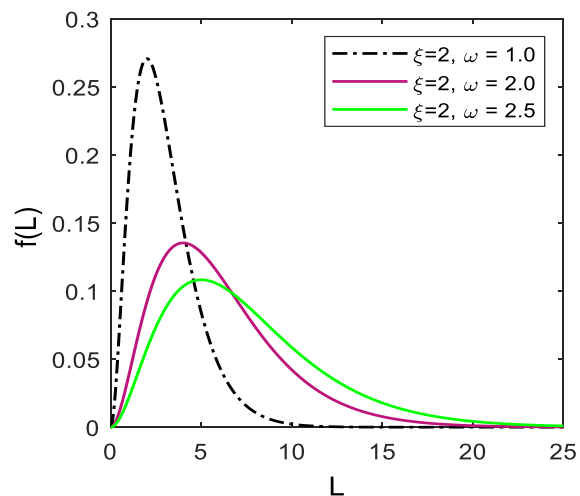
همانطور که ملاحظه می‌شود یکی از شروط اساسی در مدل تولر-آر آنست که سطح ویژه بدست آمده از مدل (رابطه ۷) تا حد ممکن به مقدار اندازه‌گیری شده نزدیک باشد. در صورتی که مقدار اندازه‌گیری شده سطح ویژه که اندازه‌گیری آن دشوار می‌باشد، در دسترس نباشد، می‌توان از توابع زود یافت خاک پیشنهادی توسط (Or and Wraith 1999) به منظور برآورد حد بالایی ( $SA_{upper}$ ) و حد پایینی سطح ویژه ( $SA_{lower}$ ) در رابطه (۱۰)، بر حسب درصد رس، استفاده نمود. در این پژوهش از تابع توزیع گاما با ضرایب شکل اختیاری (۲، ۳، ۴ و ...) و تابع توزیع ویبال که انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به توزیع گاما دارد، استفاده می‌شود. تابع توزیع گاما در حالت کلی به صورت ذیل نوشته می‌شود:

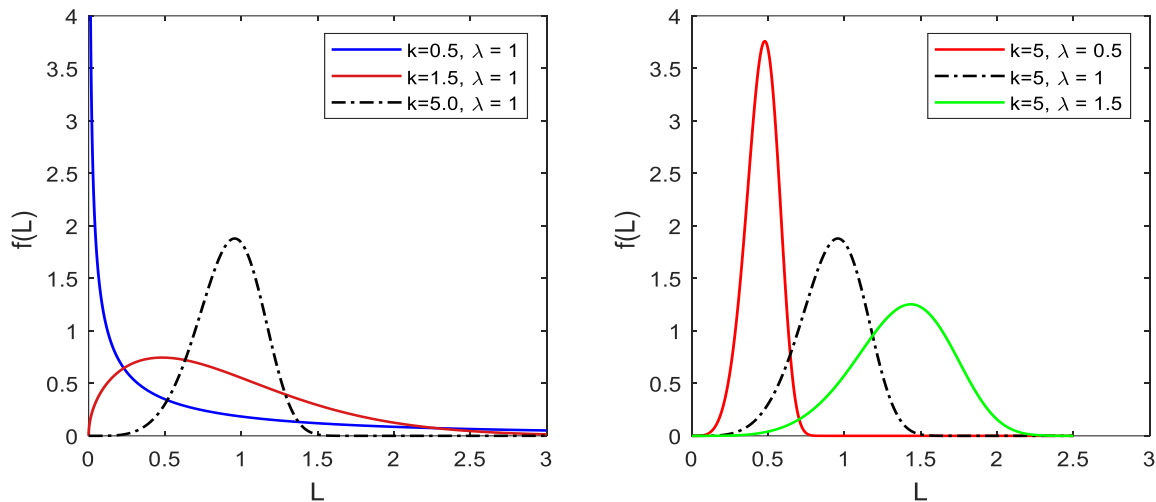
$$f(L) = \frac{L^\xi}{\xi! \omega^{\xi+1}} \exp\left(-\frac{L}{\omega}\right) \quad L \geq 0. \quad (\text{رابطه } 11)$$

در توزیع گاما ضریب شکل ( $\xi$ ) تنها مقادیر صحیح و مثبت می‌تواند به خود بگیرد. پارامتر دیگر این مدل  $\omega$  پارامتر مقیاس نامیده شده که همواره بزرگتر از صفر و عدد حقیقی می‌باشد. شکل (۳)، شکل کلی تابع گاما و نحوه اثر هر یک از پارامترهای



شکل ۳- تابع توزیع گاما و نحوه تاثیر پارامترهای  $\xi$  و  $\omega$  بر شکل کلی توزیع





شکل ۴- تابع توزیع ویبال و نحوه تاثیر پارامترهای  $k$  و  $\lambda$  بر شکل کلی توزیع

وسعی از مقادیر سطح ویژه می‌باشند که حدود بالا و پایین سطح ویژه همانطور که اشاره گردید بر اساس درصد رس و با روابط ارائه شده توسط Or and Wraith (1999) تخمین زده شده است. جدول (۲) ثابت‌های فیزیکی شامل خصوصیات فیزیکی آب و ضرایب هاماکر مورد نیاز را نشان می‌دهد (Tuller et al., 1999). مقادیر ثابت‌های هاماکر بر اساس پیشنهاد Or and Tuller (1999) انتخاب شد. ضریب  $A_{lv}$  مستقل از نوع خاک بوده در حالی که ضریب  $A_{svl}$  خاک‌هایی که دارای بخش قابل توجهی از کائولینیت هستند، می‌تواند اندکی متفاوت باشد. (Tuller and Or, 2005).

### خصوصیات خاک‌های مورد مطالعه

به منظور ارزیابی مدل تعمیم داده شده در این پژوهش، چهار خاک شامل طیف وسیعی از بافت و سایر خصوصیات مورد مطالعه قرار گرفته است که دو خاک از Pachepsky et al., (1984) و دو خاک نیز از Mualem, (1976b) انتخاب شده است. برای هر دو خاک منحنی مشخصه رطوبتی برای مکش‌های نسبتاً بالا اندازه‌گیری شده است که برای ارزیابی مدل حاضر در ناحیه خشک منحنی مشخصه رطوبتی حائز اهمیت می‌باشد. جدول (۱) خصوصیات فیزیکی چهار خاک مورد مطالعه را نشان می‌دهد. چهار خاک انتخابی دارای درصد متفاوتی از رس و به تبع آن طیف

جدول ۱- خصوصیات اندازه‌گیری شده خاک‌های مورد مطالعه

تخلخل	سطح ویژه $m^2/g$	رس %	بافت خاک
۰/۴۰۴	۳۴-۲۳	۹/۳	Sandy Loam <sup>a</sup>
۰/۴۴۰	۷۷-۳۸	۱۷/۰	Gilat Loam <sup>b</sup>
۰/۵۲۸	۱۷۳-۶۹	۳۳/۹	Clay loam <sup>a</sup>
۰/۴۴۶	۳۴۸-۱۲۸	۶۵/۰	Beit Netofa Clay <sup>b</sup>

a: از Pachepsky et al., (1984) b: از Mualem, (1976b)

جدول ۲- مقادیر برخی از خصوصیات فیزیکی مورد استفاده در تحقیق

واحد	مقدار	نماد	خصوصیات
J	$3/7 \times 10^{-10}$	$A_{lv}$	ثابت هاماکر (مایع- مایع از طریق بخار)
J	$-6/0 \times 10^{-10}$	$A_{svl}$	ثابت هاماکر (بخار- جامد از طریق مایع واسط)
N/m	۰/۰۷۱۵	$\sigma$	کشش سطحی آب
Kg/m <sup>3</sup>	۹۹۸/۲۱	$\rho$	چگالی آب

(۹) را برای خاک Clay loam برای توزیع ویبال و توزیع گاما با ضرایب شکل (۲) متفاوت را نشان می‌دهد. منحنی مشخصه حاصل از هر یک از توزیع‌ها نشان می‌دهد که بهترین برازش

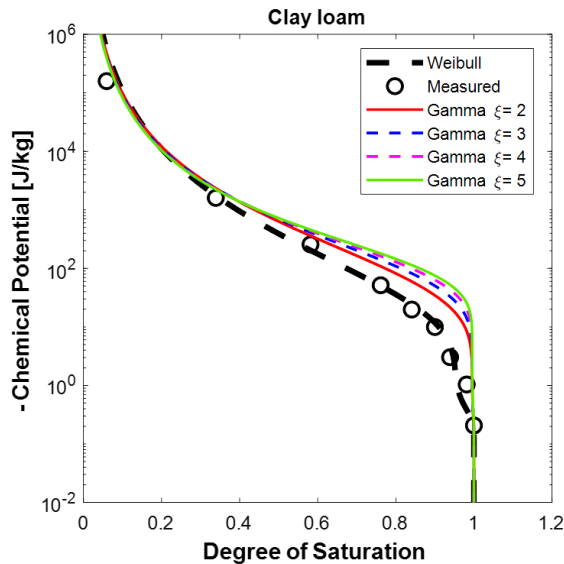
### نتایج و بحث

مقایسه مدل تولر-ار اولیه و مدل تعمیم یافته

شکل (۵) بهترین برازش حاصل از بهینه‌سازی تابع هدف در رابطه

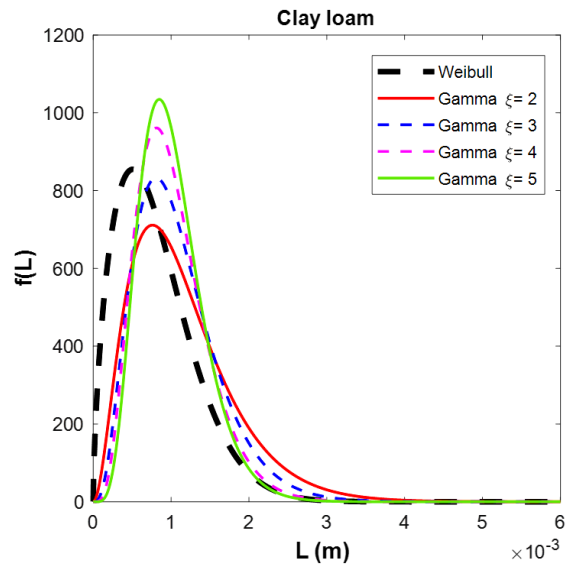


نزدیک به اشباع افزایش این ضریب، از دقت مدل کاسته است و بهترین مقدار پیشنهادی برای ضریب شکل در توزیع گاما برابر با ۲ می‌باشد.



شکل ۵- منحنی مشخصه حاصل از برازش مدل تولر-آر تعمیم یافته برای توزیع گاما با ضرایب شکل متفاوت با توزیع اندازه منافذ ویبال (چپ)، منحنی اندازه توزیع منافذ حاصل از بهترین برازش (راست)

حاصل از توزیع ویبال می‌باشد. همانطور که در منحنی مشخصه نهایی مشاهده می‌شود افزایش ضریب  $\xi$  در توزیع گاما، تغییری در ناحیه خشک منحنی مشخصه ایجاد نکرد. با این حال در ناحیه



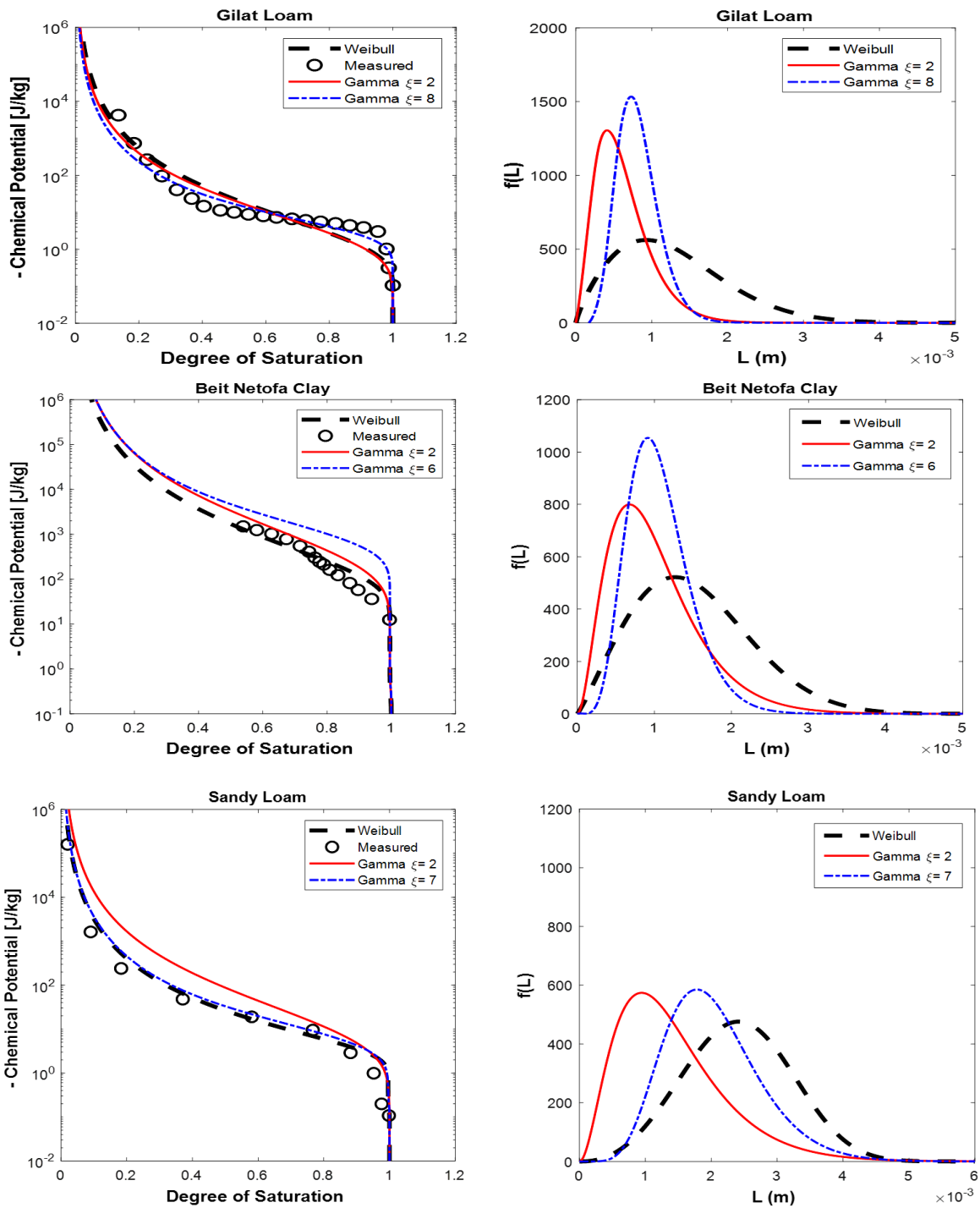
گاما با  $\xi = 2$  اختلاف زیادتری با مقادیر اندازه‌گیری شده دارد. هر سه توزیع بدست آمده برای خاک Sandy loam دارای توزیع یکسانی در نقطه شروع و انتها ( $L_{max}$ ) می‌باشند که در منحنی مشخصه بدست آمده از هر سه خاک نیز دقت هر سه مدل در ابتدا و انتهای منحنی تقریباً یکسان می‌باشد. با این حال چولگی مثبت توزیع گاما با  $\xi = 2$  باعث کاهش دقت منحنی مشخصه رطوبتی در رطوبت‌های میانی گردیده است که با کاهش این چولگی به سمت چپ در توزیع‌های ویبال و گاما با  $\xi = 7$  پوشش بهتری بر اندازه منافذ میانی حاصل شد که خود عامل اصلی در بهبود منحنی مشخصه نهایی در این دو خاک می‌باشد.

**تفکیک موئینگی و جذب سطحی در منحنی مشخصه رطوبتی**  
همانطور که قبلاً ذکر شد، مزیت عمده مدل تولر-آر در نظر گرفتن نیروهای جذب سطحی می‌باشد که در مدل‌های بر پایه BCC در نظر گرفته نمی‌شود. در رابطه (۵الف)، مجموع سه جمله اول میزان نگهداشت آب در خاک در اثر نیروهای موئینگی را نشان داده و دو جمله  $Sw_5$  و  $Sw_4$  نگهداشت در اثر نیروهای جذب سطحی می‌باشند. شکل (۷) برای هر یک از خاک‌های مورد مطالعه بهترین برازش حاصل از مدل تعمیم داده شده انتخاب گردیده و سپس منحنی مشخصه به دو قسمت موئینگی و جذب سطحی تفکیک گردید. ضرایب برازشی حاصل از برازش هر یک از خاک‌ها به تفکیک در جدول (۳) قابل مشاهده می‌باشد.

شکل (۶) نتایج برازش مدل تولر-آر اولیه (در حالت  $\xi = 2$ ) را در کنار نتایج بهترین برازش مدل تعمیم یافته، شامل توزیع گاما با مقدار  $\xi$  اختیاری و همچنین بهترین برازش با استفاده از توزیع ویبال را در کنار منحنی توزیع اندازه منافذ بدست آمده نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود برای خاک Gilat Loam توزیع اندازه منافذ ویبال نتایجی مشابه توزیع گاما با  $\xi = 2$  بدست می‌دهد که هر دو توزیع در ناحیه نزدیک به اشباع از دقت مناسبی برخوردار نمی‌باشند در حالی که توزیع گاما با ضریب شکل برابر با ۸ در این خاک، منجر به بهبود برازش در ناحیه نزدیک به اشباع شد.

برای خاک Beit Netofa Clay توزیع منافذ ویبال بهترین برازش را به منحنی مشخصه بدست می‌دهد که دلیل عمده آن واریانس بیشتر این توزیع اندازه منافذ حول میانگین می‌باشد. در خاک‌های رسی مانند Beit Netofa Clay برخلاف خاک‌های شنی، توزیع اندازه منافذ طیف وسیعتری را شامل می‌شود که بر اساس نتایج بدست آمده، توزیع ویبال به علت انعطاف‌پذیری بالاتری که دارد، می‌تواند توزیع منافذ در خاک‌های رسی را (نسبت به توزیع گاما) به صورت بهتری بیان نماید.

برای خاک Sandy loam هر دو توزیع ویبال و گاما در حالت  $\xi = 7$  نتایج به مراتب بهتری را نسبت به مدل اولیه گاما با  $\xi = 2$  تولید نموده‌اند به ویژه در ناحیه رطوبت‌های میانی که توزیع



شکل ۶- منحنی مشخصه حاصل از برازش به سه خاک مورد مطالعه: مدل تولر-ار اولیه (با ضریب شکل برابر با ۲)، بهترین برازش حاصل از توزیع گاما در مدل تولر-ار تعمیم یافته و بهترین برازش حاصل از توزیع اندازه منافذ ویبال (چپ)، منحنی اندازه توزیع منافذ حاصل از بهترین برازش (راست)

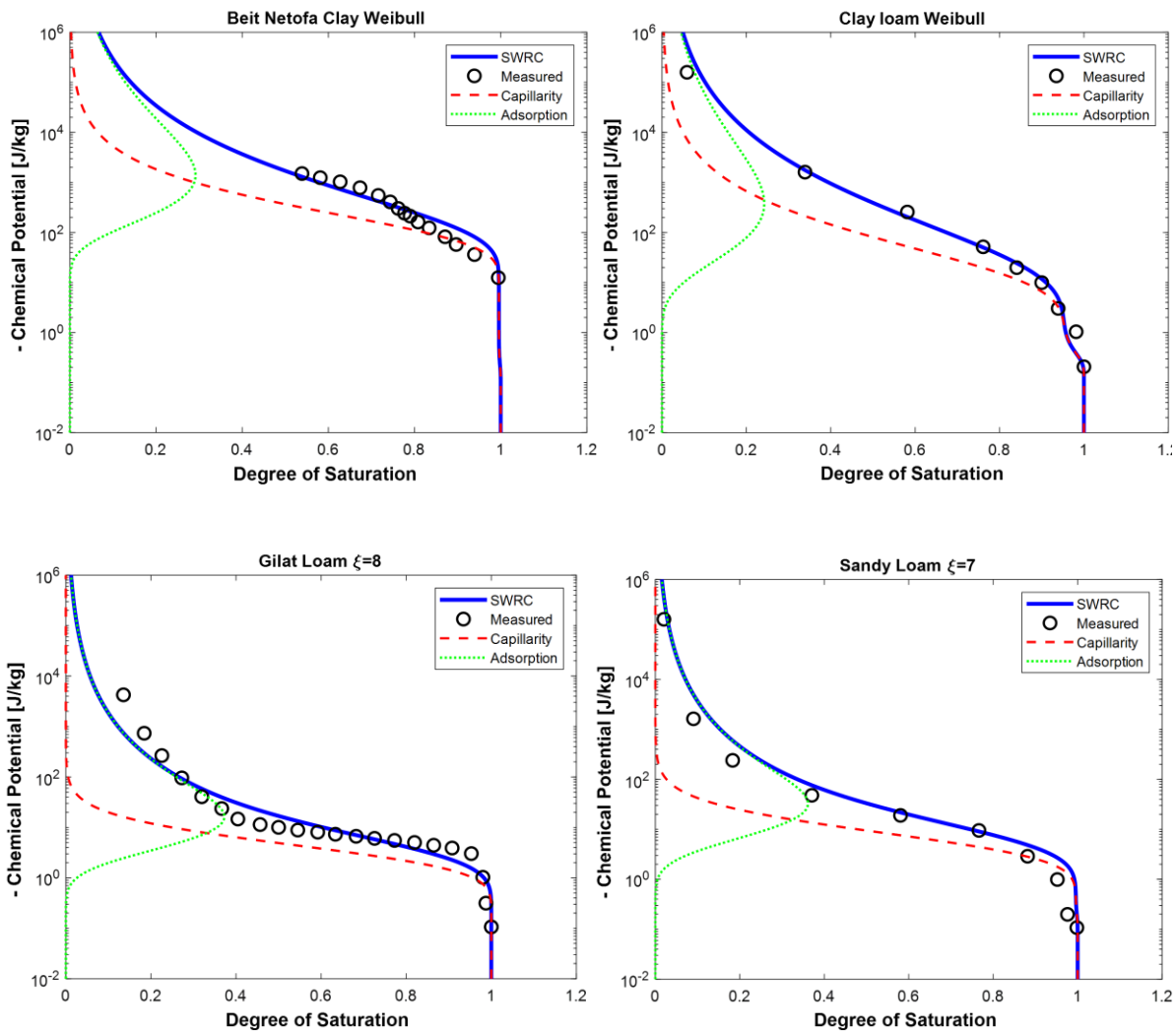
منحنی مشخصه به صورت خطی در آمده و مانند موئینگی همگرا به صفر نمی‌شود. همچنین شروع مولفه جذب سطحی در خاک‌های مختلف متفاوت می‌باشد که تابعی از مکش ورود هوا به خاک است که خود تابعی از بافت خاک می‌باشد.

شکل (۷) نشان می‌دهد که در تمام خاک‌ها مولفه درجه اشباع در اثر موئینگی در مکش‌های ابتدایی غالب بوده، در حالی که در مکش‌های بالا (به سمت ناحیه خشک) از مقدار آن کاسته شده و در نهایت به مقدار صفر همگرا می‌شود. برخلاف مولفه موئینگی، درجه اشباع در اثر نیروهای جذب سطحی در انتهای

جدول ۳- پارامترهای برازشی برای مدل‌های گاما و ویبال

RMSE	SA	$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\epsilon$	$\mu_b$	$\beta$	بهترین برازش	خاک
-	m <sup>2</sup> /g				J/kg			
۰/۰۴۲	۲۴	۰/۰۰۰۲۵	۷	۴۶۶۹	-۰/۰۰۴۶	۲۴۳۸	گاما	Sandy Loam
۰/۰۶۶۵	۴۴	۰/۰۰۰۰۹	۸	۲۵۵	-۰/۰۱۱۰	۲۲۸۳	گاما	Gilat Loam
۰/۱۸۲	۱۷۳	۰/۰۰۰۰۹	۱/۶۴	۲۱۹۹	-۰/۰۱۷۰	۹۵۱۹	ویبال	Clay loam
۰/۰۴۵	۱۴۰	۰/۰۰۱۷	۲/۱۲	۴۶۷۰	-۰/۰۰۵۹	۲۴۳۸	ویبال	Beit Netofa Clay

$\alpha_1$  و  $\alpha_2$  در توزیع ویبال به ترتیب معرف  $k$  (پارامتر شکل) و  $\mu$  (پارامتر مقیاس) و در توزیع گاما معرف  $\xi$  (پارامتر شکل) و  $\theta$  (پارامتر مقیاس) است. مقدار RMSE، مربوط به مقادیر مدل‌سازی شده و اندازه‌گیری شده درجه اشباع می‌باشد.



شکل ۷- تفکیک نگهداشت رطوبت موئینگی و جذب سطحی برای چهار خاک مورد مطالعه در بهترین برازش از مدل تعمیم یافته به هر یک از خاک‌ها

(۷) ملاحظه می‌شود، در مکش‌های نزدیک به صفر که تمام منافذ در حالت اشباع قرار دارند، سهم رطوبت جذب سطحی نزدیک به صفر می‌باشد و تدریجاً با افزایش مکش، منافذ با اندازه کوچکتر هوادار گردیده و سهم جذب سطحی به مقدار حداکثر خود رسیده و پس از آن، با افزایش بیشتر مکش، مقدار آب درون منافذ کاهش یافته و هر دو مؤلفه رطوبت موئینگی و جذب سطحی کاهش می‌یابد.

آنچه در تفسیر نتایج شکل (۷) اهمیت دارد، نحوه تفکیک و تمایز بین دو نوع رطوبت موئینگی و جذب سطحی در مقیاس منفذ و نمونه خاک می‌باشد. همانطور که در رابطه (۴) مشاهده می‌شود، شعاع ترشدگی تابعی از اندازه منفذ مرکزی بوده و بیانگر شعاعی یا مکش متناظری است که در آن، منفذ به صورت ناگهانی از حالت هوادار به اشباع کامل در می‌آید (به نحو مشابه در فرآیند زهکشی یا خشک شدن منفذ) و رطوبت از حالت جذب سطحی به حالت موئینگی تغییر وضعیت می‌دهد. همانطور که در شکل

## نتیجه‌گیری

با وجود موفقیت زیاد مدل تولر-آر در شبیه‌سازی فرآیندهایی که در مدل‌های BCC مغفول مانده است، یکی از مشکلات مدل، عدم دقت آن در شبیه‌سازی منحنی مشخصه رطوبتی در ناحیه رطوبت‌های میانی و نزدیک به اشباع، به علت محدود بودن توزیع اندازه منافذ خاک در مدل اولیه (Or and Tuller (1999) به حالت خاصی از توزیع گاما با ضریب شکل برابر با ۲ می‌باشد. همچنین به علت پیچیدگی ذاتی مدل تولر-آر و در برداشتن حداقل چهار پارامتر برازشی، جواب‌های حاصل از برازش، وابسته به حدس اولیه برای شروع فرآیند بهینه‌سازی می‌باشد.

در پژوهش حاضر به منظور غلبه بر مشکلات مربوط به عدم انعطاف پذیری توزیع اندازه منافذ اولیه، که باعث کاهش دقت مدل می‌شود، با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی پارامتر توزیع اندازه منافذ خاک بهینه‌سازی گردیده است که شامل توزیع اندازه منافذهای گاما در حالت کلی و همچنین توزیع دو پارامتری ویبال می‌باشد که با توجه به ساختار اصلی این نوع توزیع، انعطاف‌پذیری بسیار نسبت به توزیع گاما دارد.

همچنین در روش استفاده شده، از یک الگوریتم بهینه‌سازی سراسری استفاده می‌کند که برخلاف مدل اولیه تولر-آر،

مجموعه جواب نهایی وابسته به حدس اولیه نخواهد بود. مقایسه نتایج مدل اخیر و مدل اولیه تولر-آر برای چهار بافت خاک که طیف وسیعی از بافت را تشکیل می‌دهد، نشان از موفقیت کامل توزیع ویبال در اکثر موارد داشته که منجر به بهبود برازش مدل در ناحیه رطوبت‌های میانی گردید. همچنین نتایج نشان داد که در دو خاک دیگر با بافت لوم، توزیع گاما با ضریب شکلی بیشتر از مقدار استفاده شده در مدل تولر-آر اولیه، بهترین برازش را بدست می‌دهد. با توجه به افزایش دقت پیش‌بینی‌های مدل با در نسخه بهبود یافته، استفاده از دیگر توابع توزیع احتمالی همچون توزیع لوگ نرمال، توزیع گامای ناقص و ... در پژوهش‌های آتی پیشنهاد می‌شود.

## سپاس‌گزاری

نویسندگان مراتب سپاس خود را از پروفسور مارکوس تولر جهت فراهم نمودن اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی منحنی مشخصه رطوبتی به منظور ارزیابی مدل جدید و همچنین راهنمایی‌هایشان در حین انجام پژوهش حاضر، اعلام می‌دارند.

"هیچ‌گونه تعارض منافع بین نویسندگان وجود ندارد"

## REFERENCES

- Assouline, S., Tessier, D., & Bruand, A. (1998). A conceptual model of the soil water retention curve. *Water Resources Research*, 34(2), 223-231.
- Durner, W. (1994). Hydraulic conductivity estimation for soils with heterogeneous pore structure. *Water resources research*, 30(2), 211-223.
- Khlosi, M., Cornelis, W. M., Douaik, A., van Genuchten, M. T., & Gabriels, D. (2008). Performance evaluation of models that describe the soil water retention curve between saturation and oven dryness. *Vadose Zone Journal*, 7(1), 87-96.
- Lebeau, M., & Konrad, J. M. (2010). A new capillary and thin film flow model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research*, 46(12).
- Leij, F. J., Russell, W. B., & Lesch, S. M. (1997). Closed-form expressions for water retention and conductivity data. *Ground water*, 35(5), 848.
- Mualem, Y. (1976a). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water resources research*, 12(3), 513-522.
- Mualem, Y. (1976b). catalogue of the hydraulic properties of unsaturated soils.
- Or, D., & Wraith, J. M. (1999). Temperature effects on soil bulk dielectric permittivity measured by time domain reflectometry: A physical model. *Water Resources Research*, 35(2), 371-383.
- Or, D., & Tuller, M. (1999). Liquid retention and interfacial area in variably saturated porous media: Upscaling from single-pore to sample-scale model. *Water Resources Research*, 35(12), 3591-3605.
- Othmer, H., Diekkrüger, B., & Kutilek, M. (1991). Bimodal porosity and unsaturated hydraulic conductivity. *Soil Science*, 152(3), 139-150.
- Pachepsky, Y. A., Shcherbakov, R. A., Varallyay, G., & Rajkai, K. (1984). On obtaining soil hydraulic conductivity curves from water retention curves. *Pochvovedenie*, 10, 60-72.
- Peters, A., & Durner, W. (2008). A simple model for describing hydraulic conductivity in unsaturated porous media accounting for film and capillary flow. *Water Resources Research*, 44(11).
- Philip, J. R. (1977). Unitary approach to capillary condensation and adsorption. *The Journal of Chemical Physics*, 66(11), 5069-5075.
- Ross, P. J., & Smettem, K. R. (1993). Describing soil hydraulic properties with sums of simple functions. *Soil Science Society of America Journal*, 57(1), 26-29.
- Sadeghi, M., Ghahraman, B., Ziaei, A. N., Davary, K., & Reichardt, K. (2012). Invariant solutions of Richards' equation for water movement in dissimilar soils. *Soil Science Society of America Journal*, 76(1), 1-9.
- Tuller, M., & Or, D. (2005). Water films and scaling of soil characteristic curves at low water contents. *Water Resources Research*, 41(9).
- Tuller, M., & Or, D. (2001). Hydraulic conductivity of variably saturated porous media: Film and corner flow in angular pore space. *Water Resources*

Research, 37(5), 1257-1276.

Tuller, M., Or, D., & Dudley, L. M. (1999). Adsorption and capillary condensation in porous media: Liquid retention and interfacial configurations in angular pores. *Water Resources Research*, 35(7), 1949-1964.

Ugray, Z., Lasdon, L., Plummer, J., Glover, F., Kelly, J., & Martí, R. (2007). Scatter search and local NLP solvers: A multistart framework for global optimization. *INFORMS Journal on Computing*, 19(3), 328-340.