



Quasi-Two Dimensional Modeling of Flow Hydraulics in Deposited Pipes

Abdolreza Zahiri¹ | Soroosh Sharifi² | Reza Teimouri³ | Marzieh Keramatloo⁴

1. Corresponding Author, Water Engineerin Department, Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources, Gorgan, Iran. E-mail: azahiri@gau.ac.ir, zahiri.areza@gmail.com
2. Water and Environment Engineering Department, Birmingham University, U.K., E-mail: s.sharifi@bham.ac.uk
3. Water Engineering Department, Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources, Gorgan, Iran. E-mail: rezateimourey@gmail.com
4. Water Engineering Department, Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources, Gorgan, Iran. E-mail: marzieh.keramatlou@yahoo.com

Article Info

Article type: Research Article

Article history:

Received: Feb. 18, 2026

Revised: May. 1, 2026

Accepted: July. 1, 2026

Published online: Aug. 2026

Keywords:

*Circular sections,
Free water surface,
lateral distribution of flow
velocity,
lateral distribution of boundary
shear stress,
Quasi two dimensional model*

ABSTRACT

Circular closed conduits with free surface have many applications in nature. Two-dimensional flow hydraulic simulation studies in these channels are limited and generally one-dimensional relations and equations are used for modeling and designing these channels. In this study, a quasi-two-dimensional mathematical model (Shiono and Knight, SKM) based on the Navier-Stokes equations is used to calculate the transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress in a deposited pipe (or pipe with a flat bed). To solve the SKM model, three key coefficients of this model must be determined which play a decisive role in simulating the transverse velocity distribution and boundary shear stress. In this study, the Rameshwaran and Shiono (2007) equation was used to calculate the friction coefficient (f) and a numerical optimization process based on laboratory data was used to calibrate the two coefficients of eddy viscosity (λ) and the secondary flow (β). The results indicate the different capabilities of the Shiono and Knight models in simulating the transverse velocity and shear stress distribution. The results indicate the different capabilities of the Shiono and Knight model in simulating the lateral distribution of velocity and shear stress. Although this model estimates the velocity distribution with reasonable accuracy (with an average and maximum error of 6 and 7.1 percent, respectively), the boundary shear stress distribution (with an average and maximum error of 18.5 and 22 percent, respectively) is far from acceptable values.

Cite this article: Zahiri, A., Sharifi, S., Teimouri, R., Keramatloo, M. (2026) Quasi-Two Dimensional Modeling of Flow Hydraulics in Deposited Pipes, *Iranian Journal of Soil and Water Research*, 57 (6), 1321-1335. <https://doi.org/10.22059/ijswr.2026.411107.670103>

© The Author(s).

Publisher: University of Tehran Press.

DOI: <https://doi.org/10.22059/ijswr.2026.411107.670103>



EXTENDED ABSTRACT

Introduction

In addition to rivers and canals, which always have a free water surface, in some cases, closed conduits such as partially-filled pipes and culverts also are gravity-fed. The flow in these sections is very different from the hydraulics of flow in closed or under pressure pipes. One of the distinguishing aspects of these two types of flow is the higher probability of sedimentation occurring in the free flow conditions. Sedimentation in these sections may occur naturally or artificially. In sewers, this sedimentation generally occurs in non-self-cleaning pipes due to a reduction in flow velocity (formation of a backwater profile, M1, caused by downstream obstacles) or the entry of sediment particles larger than the particle mobility threshold at the time of pipe design. In road culverts, a sediment bed may be used at the bottom of the culvert to create a suitable environment and substrate for fish to live and passage. Over time, the sediment layer deposited at the bottom of the section becomes stable and is considered a new geometry for the culvert. So far, the hydraulic design and analysis of flow in these channels has been mainly one-dimensional, using empirical and semi-analytical relations or equations, and two or three-dimensional simulations in this field are limited. In this study, a quasi-two-dimensional model was used to analyze the flow in partially-filled deposited pipes, which has a lower run time than two- and three-dimensional models and greater accuracy than one-dimensional models.

Material and Methods

Nowadays, there are many mathematical models that, while having the accuracy of two-dimensional and three-dimensional models, are similar in simplicity to one-dimensional models. These models are called depth-averaged models or lateral distribution model (LDM) and calculate hydraulic parameters (such as flow velocity, discharge, bed shear stress, etc.) across the channel. Among the important and well-known models in this field are Wark et al (1990), Shiono and Knight (1991), and Ervine et al. (2000). Due to the widespread applications of the Shiono and Knight model (SKM) by researchers, this model was used in this study. SKM is a quasi-two-dimensional mathematical model based on the Navier-Stokes equations which is generally used to calculate the transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress in open channels. In this study, this model is used for flow analysis of a partially-filled pipe with flat bed. For calibration of friction coefficient (f), the Rameshwaran and Shiono (2007) equation was used. Also for calibration of two coefficients of eddy viscosity (λ) and the secondary flow (β), a numerical optimization process was used. The optimization of these two coefficients is based on the simultaneous solution of transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress with a minimum error in a deposited pipe with three different flow depths. Afterward, this process is validated based on another flow depth. SKM has been numerically solved using finite difference methods. All steps of solving this model, as well as optimization of eddy viscosity and secondary flow coefficients, have been carried out in Excel.

Results and Discussion

By comparing the SKM results with Sterling's experimental data, it was found that this model behaves differently in estimating the transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress in deposited pipes. The results of the transverse velocity distributions at all flow depths have very good accuracy, with a mean error of about 6 percent and a maximum of nearly 7.1 percent. The average flow velocity obtained from the Manning equation is higher than both the calculated and observed velocities. The highest error of the Manning formula (about 37%) occurred at the lowest flow depth (40.7 mm). After calculating the transverse velocity distribution, the flow discharge is obtained by lateral integration of this distribution. The stage-discharge curves obtained from the SKM are in much better agreement with the experimental data compared to the Manning formula results.

However, the lateral distribution of shear stresses is not very satisfactory. The mean and maximum of shear stress prediction errors are 18.5 and 22 percent, respectively. Although this behavior is not unusual and has been reported in studies by various researchers, it could also have another reason. One of the reasons for this issue is the complexity of the geometry of the partially filled pipes with flat bed.

Conclusion

In this study, a simple and practical quasi-two-dimensional model based on flow hydrodynamics was used to simulate the lateral distribution of flow velocity and bed shear stress, as well as to extract the stage-discharge curve in partially-filled deposited pipes. The results showed that:

1. The results obtained have appropriate accuracy and the use of the SKM proposed in this study can reduce the error in flow rate calculations by up to 30% compared to the widely used Manning formula.
2. For the lateral distribution of local bed shear stress, several simulations were performed using the SKM at different flow depths. The results of this simulations showed that the estimation of bed shear stress values

in partially-filled deposited pipes is less accurate than the flow velocity values. The error of the traditional formula ($\tau = \gamma R S_0$), which is widely used in estimating shear stress in rivers and open channels, is more than 72%. Therefore, the results of the SKM, as initial and preliminary solutions, well meet the needs of researchers in the design and management of hydraulic structures.

3. The quasi-two-dimensional Shiono and Knight model, using the equations considered in this study, has high efficiency and accuracy in estimating the distribution of flow velocity and shear stress across partially filled and deposited pipes and can be a very good alternative to the conventional one-dimensional models used in this field.

Funding

This work was funded by Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources (GUSNR) under grant no. 04-525-69.

Authorship contribution

All authors contributed equally to the conceptualization of the article and writing of the original and subsequent drafts.

Declaration of Generative AI and AI-assisted technologies in the writing process

The authors didn't use any generative AI and AI-assisted technologies in the writing process of this manuscript.

Data availability statement

The data that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

Acknowledgements

The authors would like to thank financial supports of Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources in the present study.

Ethical considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, and plagiarism, and any form of misconduct.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

مدل سازی شبه دوبعدی هیدرولیک جریان در لوله های رسوبگذار

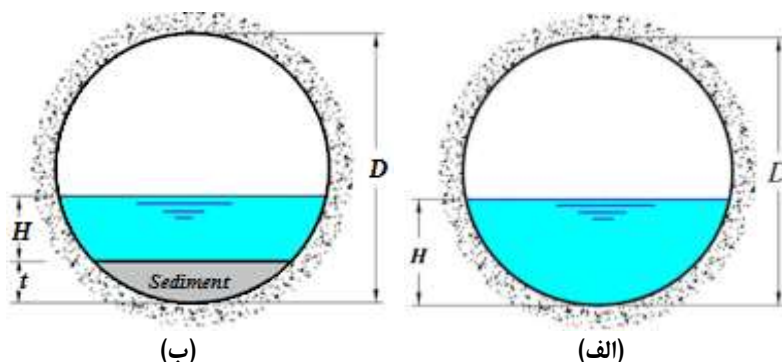
عبدالرضا ظهیری^۱، سروش شریفی^۲، رضا تیموری^۳ و مرضیه کرامتلو^۴^۱. گروه مهندسی آب، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان، گرگان، ایران، رایانامه: zahiri.arez@gmail.com, zahiri@gu.ac.ir^۲. گروه مهندسی آب و محیط زیست، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه بیرمنگام، انگلستان رایانامه: s.sharifi@bham.ac.uk^۳. گروه مهندسی آب، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان، گرگان، ایران. رایانامه: rezateimourey@gmail.com^۴. گروه مهندسی آب، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان، گرگان، ایران، رایانامه: marzieh.keramatlou@yahoo.com

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	
تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۱۱/۲۹	
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۲/۱۱	
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۴/۱۰	
تاریخ انتشار: شهریور ۱۴۰۵	
واژه های کلیدی: توزیع عرضی تنش برشی، توزیع عرضی سرعت، جریان با سطح آزاد، لوله های رسوبگذار، مدل شبه دوبعدی	مجاری دایره ای با سطح آزاد دارای کاربردهای مهمی در طبیعت هستند. مطالعات شبیه سازی دوبعدی هیدرولیک جریان در این مجاری محدود بوده و عموماً از روابط و معادلات یک بعدی برای مدل سازی و طراحی این مجاری استفاده می شود. در این مطالعه، از یک مدل ریاضی شبه دوبعدی (شیونو و نایت) مبتنی بر معادلات ناویر-استوکس برای محاسبه توزیع عرضی سرعت جریان و تنش برشی مرزی در یک لوله رسوبگذار استفاده شده است. برای اجرا و ارزیابی دقت این مدل، از داده های آزمایشگاهی سترلینگ در یک لوله با بستر رسوبی استفاده شد. برای حل مدل شیونو و نایت باید ۳ ضریب کلیدی این مدل که نقشی تعیین کننده در شبیه سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی مرزی ایفا می کنند، تعیین شوند. در این مطالعه، از رابطه Rameshwaran and Shiono (2007) برای محاسبه ضریب اصطکاک و از یک فرآیند بهینه سازی عددی مبتنی بر داده های آزمایشگاهی برای واسنجی دو ضریب لزجت گردابه ای و ضریب جریان های ثانویه استفاده شد. بهینه سازی این دو ضریب بر اساس کمینه سازی همزمان خطای محاسبه توزیع سرعت جریان و تنش برشی مرزی در عرض لوله انجام شد. نتایج بیانگر قابلیت متفاوت مدل شیونو و نایت در شبیه سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی می باشد. این مدل اگرچه توزیع سرعت ها را با دقت مناسبی (با میانگین و حداکثر خطای ۶ و ۷/۱ درصد) برآورد می کند اما توزیع تنش برشی مرزی (با میانگین و حداکثر خطای ۱۸/۵ و ۲۲ درصد) با مقادیر قابل قبول فاصله دارد. یکی از دلایل این موضوع، پیچیدگی هندسه لوله های رسوبگذار نیمه پر است.
استناد: ظهیری؛ عبدالرضا، شریفی؛ سروش، تیموری؛ رضا، کرامتلو؛ مرضیه، (۱۴۰۵) مدل سازی شبه دوبعدی هیدرولیک جریان در لوله های رسوبگذار، مجله تحقیقات آب و خاک ایران، ۵۷ (۶)، ۱۳۳۵-۱۳۲۱. https://doi.org/10.22059/ijswr.2026.411107.670103	
ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.	© نویندگان.
DOI: https://doi.org/10.22059/ijswr.2026.411107.670103	

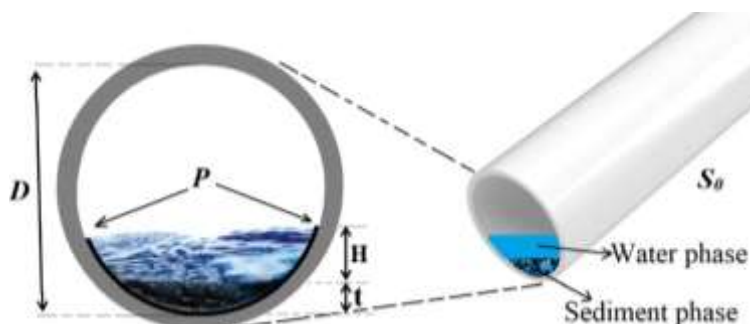


مقدمه

مجاری دایره‌ای انتقال آب معمولاً به دو صورت لوله‌های آب و فاضلاب و کالورت‌های زیرگذر در طبیعت طراحی و اجرا می‌شوند. جریان در این مجاری به صورت سطح آزاد یا ثقلی بوده و تفاوت بسیار زیادی با هیدرولیک جریان در لوله‌های تحت فشار دارد (Kehler, 2009; Yoon et al., 2012). یکی از جنبه‌های تمایز این دو نوع جریان، وقوع رسوبگذاری در حالت جریان آزاد است (Azamathula et al., 2011). رسوبگذاری در این مجاری ممکن است به صورت طبیعی یا مصنوعی اتفاق بیفتد. در مجاری فاضلاب، این رسوبگذاری عموماً در لوله‌های غیرخودشستشو^۱ به دلیل کاهش سرعت جریان (تشکیل پروفیل برگشتی، M1، ناشی از موانع پایین دست) و یا ورود ذرات رسوب و مواد اضافی بزرگتر از آستانه حرکت ذرات در زمان طراحی لوله ایجاد می‌شود. در کالورت‌ها یا آبگذرهای لوله‌ای جاده ممکن است برای ایجاد محیط و بستر مناسب برای زندگی و تردد ماهی‌ها، از یک بستر رسوبی در کف آبگذر استفاده شود (Mohebbi, 2014). به مرور زمان، لایه رسوبی ته‌نشین شده در کف مقطع، تثبیت شده و به عنوان یک هندسه جدید برای کالورت موردنظر در نظر گرفته می‌شود. شکل ۱ تفاوت دو لوله تمیز و رسوبگذار (با بستر تخت)^۲ را نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۲، مقطع طولی و عرضی یک لوله رسوبگذار نیمه‌پر به صورت شماتیک و در شکل ۳ نیز کاربرد این مجاری در عمل و برای طراحی کالورت‌های عبور ماهی همراه با جریان آب ارائه شده است.



شکل ۱- جریان در لوله‌های نیمه‌پر در حالت (الف) لوله تمیز و (ب) لوله رسوبگذار



شکل ۲- شماتیک مقطع عرضی و طولی لوله‌های نیمه‌پر در حالت رسوبگذار و معرفی متغیرهای موثر در مسئله

هیدرولیک جریان در مجاری روباز دایره‌ای بر خلاف لوله‌های تحت فشار از پیچیدگی بیشتری برخوردار است (Koutsospyrou et al., 2025). یکی از دلایل این پیچیدگی، اثر مقاومت جریان (ضریب زبری) بر محاسبات سرعت و دبی جریان عبوری است (Sterling and Knight, 2000; Zeghadnia et al., 2019). نتایج مطالعات نشان داده است که حتی در شرایط یکنواخت و با جنس لوله ثابت، نتایج استفاده از فرمول مانینگ در این مجاری قابل قبول نیست. تاکنون تحقیقات متعددی در خصوص برآورد ضریب زبری مانینگ در لوله‌های نیمه‌پر انجام شده است. در تمامی این روابط، ضریب زبری اصلاحی تابع عمق جریان و قطر لوله است (Funamizu et al., 1991; Akgiray, 2004). مثلاً کمپ رابطه‌ای را ارائه نمود که در آن، ضریب زبری مانینگ باید تا ۳۰ درصد بیشتر از ضریب مانینگ

1. Non-cleansing pipes

2. Clean and Deposited (flat bed) Pipe

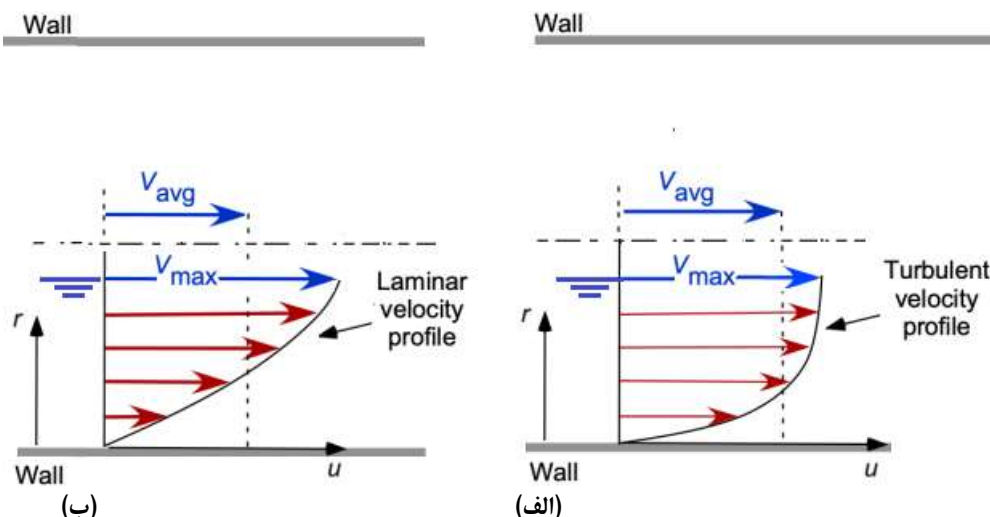
مرتبط با جنس لوله باشد (Camp, 1946). در لوله‌های رسوبگذار این پیچیدگی بیشتر است، به این دلیل که ضریب زبری در کف لوله که معمولاً رسوبات ته‌نشین شده‌اند، با زبری جداره‌های لوله متفاوت بوده و در عمق‌های مختلف جریان نیز تاثیر متفاوتی دارد.



شکل ۳- نمونه‌های کاربرد عملی مجاری دایره‌ای رسوبگذار در طبیعت، (الف) آماده‌سازی کالورت، (ب) بهره‌برداری از کالورت

بدیهی است برای حصول نتایج دقیق‌تر مشخصات هیدرولیک جریان (سرعت، دبی و تنش برشی) و نیز ارائه جزئیات بیشتری از پارامترهای هیدرولیکی مثل توزیع عرضی سرعت و تنش برشی بستر، استفاده از مدل‌های دو و سه‌بعدی مبتنی بر دینامیک سیالات محاسباتی^۱ (CFD) ضروری است (ظهیری و شریفی، ۱۴۰۴). آگاهی از توزیع سرعت جریان در عرض لوله می‌تواند تصمیم‌گیری در مورد احتمال وقوع رسوبگذاری در لوله و نیز تردد راحت و مطمئن ماهی‌ها از درون مجاری دایره‌ای را تسهیل نماید (Mohebbi, 2014). مطالعات نشان داده است که ماهی برای تردد خود، به سرعت‌هایی در محدوده‌های خاص نیاز دارد (Abbs et al., 2007; Schall et al., 2012; Gue et al., 2015; Morrison et al., 2019). توزیع عرضی تنش برشی نیز می‌تواند در مدیریت رسوبگذاری در مجاری دایره‌ای موثر باشد (Regueiro-Picallo et al., 2016). این در حالی است که کاربرد مدل‌های CFD در شبیه‌سازی جریان آشفته با سطح آزاد در مجاری دایره‌ای به‌ویژه در عمق‌های کم جریان و نیز در کناره‌های مقطع ساده نبوده و انتخاب مدل مناسب در این خصوص چالش‌برانگیز است (Li et al., 2018; Alihosseini and Thamsen, 2019). به دلایل فوق و نیز سایر محدودیت‌های مدل‌های دوبعدی مثل نیاز به حافظه محاسباتی بسیار زیاد، لزوم واسنجی دقیق و مبتنی بر داده‌های آزمایشگاهی کافی و نیز چالش‌های فراوان شبکه‌بندی (مش‌بندی) میدان حل، یافتن راهکارهایی ساده‌تر برای حل الگوی جریان در مجاری دایره‌ای با سطح آزاد دارای ارزش و کارایی علمی و کاربردی زیادی است. در این زمینه، محققین مختلف روش‌های متعددی را ارائه نموده‌اند که روش آن‌تروپی و ... قابل ذکر است (Jiang et al., 2016). همه این روش‌ها ماهیتی یک‌بعدی دارند و نمی‌توانند جزئیات هیدرولیکی جریان در مجاری دایره‌ای را ارائه کنند. به همین دلیل، در این پژوهش از راهکار موثر و بهینه‌ای استفاده شده است که ضمن دارا بودن سادگی مدل‌های یک‌بعدی، از قابلیت در حد مدل‌های دوبعدی برخوردار است. در این راهکار برای تعیین مشخصات هیدرولیک جریان در لوله‌ها، از یک مدل ریاضی شبه‌دوبعدی مبتنی بر توزیع عرضی^۲ سرعت و تنش برشی استفاده می‌شود. پایه و اساس مدل‌های ریاضی شبه‌دوبعدی، معادلات حرکتی ناویه-استوکس است که برای سادگی و حل سریعتر، در عمق جریان انتگرال‌گیری شده و به مدل‌های متوسط در عمق^۳ نیز معروف هستند. دلیل انتگرال‌گیری در عمق از معادلات ناویه-استوکس در شکل ۴ نشان داده شده است. در این شکل، توزیع قائم سرعت جریان در یک لوله نیمه‌پر برای دو حالت جریان آرام و آشفته ارائه شده است. مشاهده می‌شود که در حالت جریان آشفته، توزیع قائم سرعت تقریباً دارای یکنواختی بسیار بیشتری در مقایسه با حالت جریان آرام دارد، به‌طوری‌که میانگین عمقی سرعت جریان تفاوت چندانی با مقادیر سرعت‌ها در نقاط ارتفاعی مختلف ندارد. به همین دلیل است که معمولاً در مسائل کاربردی، ضریب تصحیح انرژی جنبشی جریان (α) در شرایط جریان آشفته معادل واحد در نظر گرفته می‌شود. اما نکته مهم‌تر این است که در این حالت، کاربرد مدل‌های ریاضی شبه‌دوبعدی که مبتنی بر محاسبه سرعت میانگین در عمق جریان هستند، می‌تواند یک ایده منطقی و موثر باشد. در این صورت، محاسبه سریع و دقیق مقادیر سرعت‌های نقطه‌ای در عرض

جریان و نیز پارامترهای مهم هیدرولیکی مانند دبی جریان، تنش برشی بستر و ... امکان پذیر خواهد بود. مدت زمان مورد نیاز برای اجرای مدل های شبه دوبعدی تقریباً معادل مدل های یک بعدی و بسیار کمتر از مدل های ریاضی دو و سه بعدی است. علاوه بر این، فرم معادلات حاکم در مدل های شبه دوبعدی و روش عددی حل آنها بسیار ساده تر از مدل های دو و سه بعدی است. در این زمینه، یک پژوهش توسط ظهیری و شریفی (۱۴۰۴) انجام شده که در آن، هیدرولیک جریان در یک لوله نیمه پر آزمایشگاهی به کمک مدل شبه دوبعدی شیونو و نایت شبیه سازی شده و منحنی دبی-اشل آن استخراج شده است. دقت نتایج دبی جریان در این روش بسیار خوب ارزیابی شده است. با توجه به نتایج مناسب مطالعه ظهیری و شریفی (۱۴۰۴)، در پژوهش حاضر سعی شده است که از همین ایده برای شبیه سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی بستر در لوله های رسوبگذار استفاده شده و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شود.



شکل ۴- تفاوت پروفیل های قائم سرعت در لوله های نیمه پر در دو حالت (الف) جریان آشفته و (ب) جریان آرام

روش شناسی پژوهش

مدل ریاضی شیونو و نایت

بر خلاف کانال ها و آبراهه های روباز که دارای مدل های ریاضی متعددی با فرضیاتی متفاوت است، مجاری روباز دایره ای از این نظر دارای محدودیت هستند. در این مجاری فقط مدل های یک بعدی و نیز دینامیک سیالات محاسباتی کاربرد داشته اند. با توجه به ارائه و پیشنهاد مدل ریاضی شبه دوبعدی شیونو و نایت در لوله های نیمه پر (ظهیری و شریفی، ۱۴۰۴)، در این مطالعه از همین مدل برای شبیه سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی مرزی در لوله های رسوبگذار استفاده شده است.

در مدل ریاضی Shiono and Knight (1999) با فرض جریان ماندگار و یکنواخت و نیز صرف نظر کردن از مولفه قائم سرعت جریان، توزیع عرضی سرعت متوسط در عمق جریان به صورت زیر بیان می شود:

$$\rho g H S_0 - \rho \frac{f}{8} U_d^2 \sqrt{1 + \frac{1}{S^2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho \lambda H^2 \left(\frac{f}{8} \right)^{1/2} \frac{\partial U_d^2}{\partial y} \right\} = \beta \rho g H S_0 \quad (\text{رابطه ۱})$$

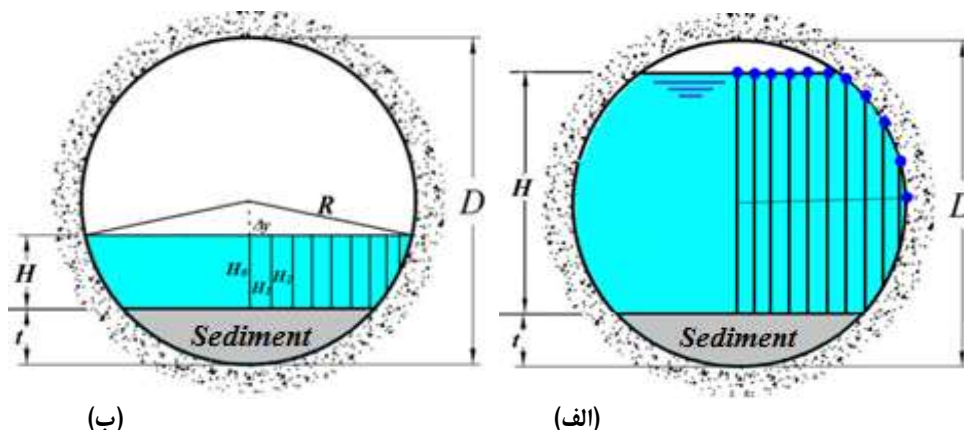
که ρ جرم حجمی آب، g شتاب ثقل، H عمق محلی جریان، S_0 شیب کف، f ضریب اصطکاک دارسی- ویسباخ، U_d سرعت متوسط در عمق در عرض مجرا، S شیب جانبی مجرا (قائم به افقی)، λ ضریب بدون بعد لزجت گردابه ای، β ضریب جریان های ثانویه و y موقعیتی از عرض مجرا می باشد که سرعت در آن نقطه باید به دست آید (Shiono and Knight, 1991).

حل مدل شیونو و نایت در لوله های رسوبگذار نیمه پر

حل توزیع عرضی سرعت جریان

برای حل این مدل و محاسبه توزیع عرضی سرعت و تنش برشی در لوله به ازاء هر عمق جریان دلخواه، باید ابتدا عرض سطح آب در لوله به چند زیربازه یا گره محاسباتی به فاصله های Δy تقسیم شود. مطالعات قبلی نشان داده اند که استفاده از حدود ۵۰ گره می تواند دقت مناسبی برای شبیه سازی توزیع عرضی سرعت فراهم کند (ظهیری و شریفی، ۱۴۰۴). در این تحقیق، به منظور افزایش دقت عددی، از ۱۰۰

گره استفاده شده است. گره‌بندی عرض سطح آب در لوله‌ها در دو حالت عمق‌های کمتر و بیشتر از شعاع لوله با هم متفاوت است. در حالت $H < R$ (شکل ۵-ا که R شعاع لوله است)، تقسیم‌بندی از وسط سطح آب تا لبه آب انجام می‌شود، اما در حالت $H > R$ (شکل ۵-ب)، این کار از وسط سطح آب تا انتهای شعاع لوله امتداد می‌یابد. در این صورت، عمق جریان در هر گره محاسباتی باید مطابق شکل ۵-ب در نظر گرفته شود. در هر دو حالت به دلیل تقارن جریان، تنها یک نیمه از مقطع لوله در نظر گرفته شده است. گره‌های مشخص شده در سطح آزاد آب و یا جداره لوله، نقطه‌هایی است که سرعت جریان در آنها محاسبه می‌شود. نکته مهم در حالت دوم این است که گره‌های انتهایی دارای سطح آزاد جریان نیستند و ممکن است فرض مدل شیونو و نایت مبنی بر افقی بودن تراز سطح آب را نقض کنند. این حالت بسیار خاصی است که تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته و اثر آن بر نتایج حل توزیع عرضی سرعت و تنش برشی مشخص نشده است.



شکل ۵- تقسیم مقطع عرضی جریان در لوله رسوبی نیمه‌پر به چندین زیربازه، (الف) عمق جریان بزرگتر از شعاع لوله ($H > R$) و (ب) عمق جریان کوچکتر از شعاع لوله ($H < R$)

برای انجام محاسبات حل عددی معادله ۱ در لوله‌های رسوبی نیمه‌پر، عمق جریان در هر گره محاسباتی در حالت $H < R$ از رابطه (۲) محاسبه می‌شود. برای حالت $H > R$ مطابق شکل ۶-الف، برای محدوده ۱ از رابطه (۲) و برای محدوده ۲ از رابطه (۳) استفاده می‌شود:

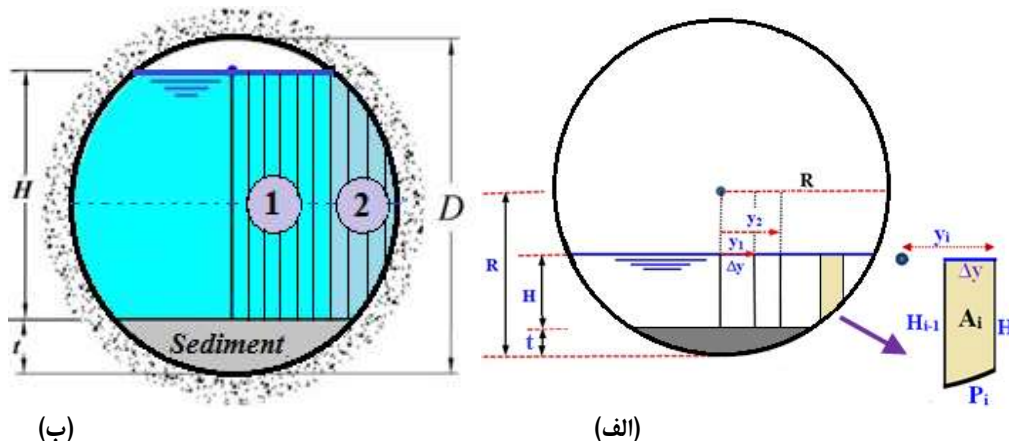
$$H_i = \sqrt{R^2 - y_i^2} - (R - H) \quad \text{رابطه (۲)}$$

$$H_i = 2\sqrt{R^2 - y_i^2} \quad \text{رابطه (۳)}$$

محاسبه مساحت هر زیربازه به روش‌های ریاضی متفاوتی امکان‌پذیر است، اما در این مطالعه و با توجه به کوچک بودن بسیار زیاد زیربازه‌ها، هر یک از این بازه‌ها به صورت مستطیل یا دوزنقه فرض شده و مساحت آنها به‌دست آمده است (شکل ۶-ب):

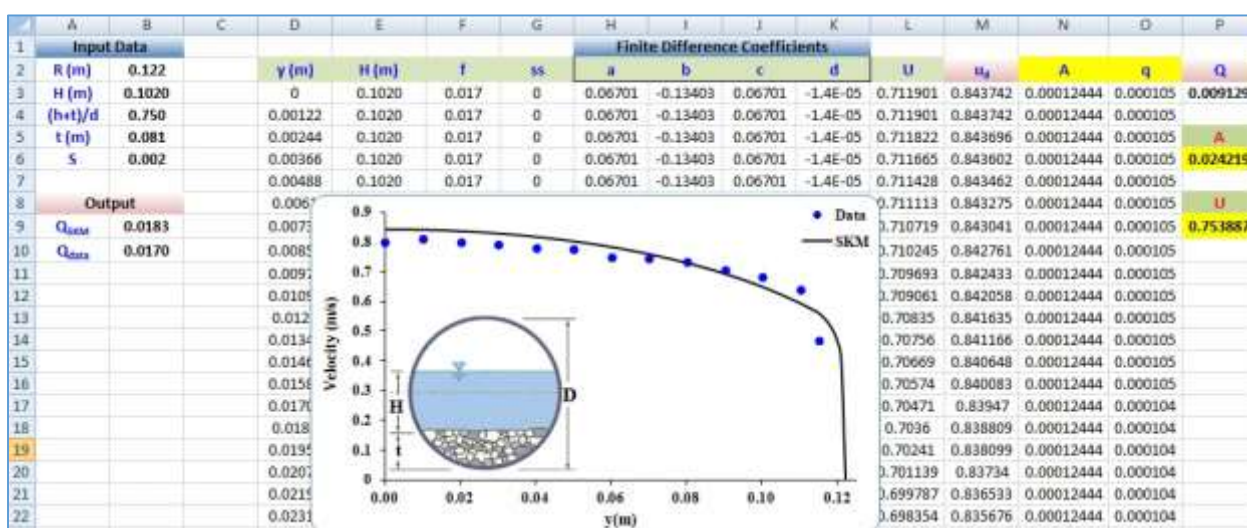
$$A_i = \frac{1}{2} \Delta y_i (H_{i-1} + H_i) \quad \text{رابطه (۴)}$$

که i نماینده هر برش یا زیربازه است.



شکل ۶- نمایش زیربازه‌ها و جزئیات آنها در یک لوله رسوبی نیمه‌پر، (الف) عمق جریان در حالت $H > R$ ، (ب) مساحت جریان

بعد از محاسبه عمق جریان در هر گره، گسسته سازی معادله دیفرانسیلی شیونو و نایت در هر گره محاسباتی به روش تفاضل های محدود انجام می شود. در این مرحله و با توجه به وجود مشتق مرتبه دوم در این معادله، گره های اول و آخر قابل استفاده نبوده و باید به ازاء این دو گره، دو شرط مرزی مناسب در نظر گرفت که سیستم حل، بسته شده و تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر شود. در نقطه ابتدایی، فرض مشتق صفر سرعت (یا وقوع سرعت جریان حداکثر در وسط لوله) و در نقطه آخر، فرض سرعت صفر (اصل عدم لغزش) قابل تعریف می باشند. با گسسته سازی معادله (۱) در تمامی گره های واجد شرایط، یک دستگاه معادلات خطی تشکیل می شود که حل این دستگاه خطی با روش های متعددی قابل انجام است (Omran et al., 2008; Tang and Knight, 2008; Rezaei and Knight, 2009; Devi and Khatua, 2017; Alawadi et al., 2018). در این مطالعه و با توجه به دسترسی همگانی به محیط اکسل، این دستگاه معادله به کمک توابع آماده این نرم افزار حل شده است. نمونه ای از حل این معادله در محیط اکسل برای یکی از داده های آزمایشگاهی این تحقیق در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۷- نمونه ای از حل مدل SKM در یک لوله رسوبگذار با عمق جریان ۱۰/۲۰ سانتیمتر (آزمایش ۳)

حل توزیع عرضی تنش برشی مرزی

علاوه بر سرعت جریان، تنش برشی بستر (τ_b) نیز دارای اهمیت زیادی بوده و می تواند در طراحی لوله های غیر رسوبگذار (خودشستشو) و نیز پیش بینی احتمال وقوع رسوبگذاری در لوله مورد استفاده قرار گیرد. برای محاسبه تنش برشی در مجاری روباز از فرمول یک بعدی متداول در مباحث هیدرولیک استفاده می شود (رابطه ۵)، این در حالی است که روابط متعدد دیگری به این منظور توسعه داده شده است. ساده ترین روش در این زمینه، رابطه (۶) می باشد که برای هر سرعت نقطه ای، یک تنش برشی مجزا را محاسبه می کند. از این روش و به کمک توزیع عرضی سرعت به دست آمده از مدل شیونو و نایت، توزیع عرضی تنش برشی محاسبه شده است.

$$\tau_{b-ID} = \gamma R S_0 \quad \text{رابطه ۵}$$

$$\tau_{b-SKM} = \rho f U_d^2 / 8 \quad \text{رابطه ۶}$$

که γ وزن مخصوص آب و R شعاع هیدرولیکی است.

تعیین مقادیر پارامترهای مدل شیونو و نایت

برای حل مدل شیونو و نایت، علاوه بر هندسه مجرا، شیب طولی، و نیز عمق های جریان، شیب جانبی و فاصله عرضی در هر گره محاسباتی، باید ۳ ضریب مهم f ، λ و β برای مجرای مورد مطالعه مشخص شوند. در این تحقیق برای تخمین ضریب اصطکاک برای هر گره در عرض مجرا از معادله پیشنهادی (Rameshwaran and Shiono, 2007) که تصحیح شده معادله کالبروک-وایت است، استفاده شد:

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{3.02\nu}{\sqrt{128gH^3S_0}} + \frac{k_s}{12.3H} \right) \right]^{-2} \quad \text{رابطه ۷}$$



که V ضریب لزجت سینماتیکی آب و k_s ارتفاع زبری معادل می‌باشد. ارتفاع زبری معادل در آبراهه‌های طبیعی معمولاً بر اساس قطر میانه ذرات رسوب کف آبراهه تعیین می‌شود، اما در اینجا بر اساس ضریب زبری مانینگ (n) و با معادله زیر تعیین شده است (Alawadi et al., 2018):

$$k_s = (8.25\sqrt{gn})^6 \quad (\text{رابطه ۸})$$

برای تخمین ضرایب λ و β در این تحقیق و با توجه به عدم وجود مقادیری استاندارد برای آنها در لوله‌های نیمه‌پر، از یک الگوریتم بهینه‌سازی استفاده شد. مبانی این بهینه‌سازی، کمینه‌سازی همزمان خطای پیش‌بینی توزیع عرضی سرعت جریان و تنش برشی مرزی انتخاب شد. برای این منظور، معیار ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برای هر یک از این دو متغیر محاسبه و تابع هدف به صورت زیر تعریف گردید:

$$\text{Obj} = W_u \times \text{RMSE}_u + W_\tau \times \text{RMSE}_\tau \quad (\text{رابطه ۹})$$

که W_u و RMSE_u به ترتیب ضریب و شاخص خطای شبیه‌سازی سرعت جریان، W_τ و RMSE_τ به ترتیب ضریب و شاخص خطای شبیه‌سازی تنش برشی مرزی است. تابع هدف تنظیم شده در این حالت، امکان برقراری توازن میان دقت پیش‌بینی هر دو متغیر هیدرودینامیکی را فراهم می‌نماید، اگرچه میزان غلبه بهینه‌سازی هر یک از متغیرها را می‌توان تنظیم نمود. مثلاً در بعضی موارد، اهمیت مقادیر سرعت‌های جریان بیشتر از تنش‌های برشی (مثل تخمین دبی) و در بعضی از شرایط (مثل طراحی لوله‌های غیررسوبگذار یا خودشستشو)، مقادیر تنش‌های برشی مهم‌تر است. در این مطالعه از مقادیر ۴ و ۲ برای ضرایب شبیه‌سازی سرعت و تنش برشی استفاده شد. فرآیند بهینه‌سازی با استفاده از Solver Toolbox نرم‌افزار اکسل و با بهره‌گیری از الگوریتم تکاملی^۱ انجام شد. این الگوریتم به دلیل دارا بودن قابلیت‌های مهمی مثل توانایی حل مسائل غیرخطی و غیرمحدب، عدم نیاز به مشتق‌پذیری تابع هدف، مقاومت بالا در برابر گیر افتادن در کمینه‌های محلی و مناسب بودن برای مسائل چندپارامتری با فضای جستجوی پیچیده انتخاب شد. در این الگوریتم، مجموعه‌ای از جواب‌های اولیه به صورت تصادفی تولید شده و طی نسل‌های متوالی، با استفاده از عملگرهای تکاملی نظیر انتخاب، جهش و ترکیب به تدریج به سمت پاسخ بهینه همگرا می‌شوند. محدودیت‌های فیزیکی و بازه‌های مجاز پارامترها بر اساس ملاحظات هیدرولیکی و مطالعات پیشین در فرآیند بهینه‌سازی اعمال گردید.

داده‌های مورد استفاده

برای اجرای مدل شیونو و نایت و ارزیابی دقت نتایج آن در برآورد توزیع سرعت و تنش برشی در عرض لوله‌های رسوبگذار نیمه‌پر، از داده‌های آزمایشگاهی Sterling (1998) استفاده شد. این آزمایش‌ها در لوله‌ای از جنس Plastic PVC به قطر ۲۴۴ میلی‌متر، ضخامت جداره ۳ میلی‌متر و طول ۲۱ متر و در شرایط جریان آشفته، یکنواخت، زیربحرانی و با رژیم صاف هیدرولیکی انجام شد. از چندین شیب کف مورد استفاده در این مطالعه، آزمایش‌های با شیب ۰/۰۰۱ برای این تحقیق استفاده شد. ضخامت عمق رسوب در این لوله ۸۱/۳ میلی‌متر انتخاب شد. در جدول ۱ خلاصه‌ای از ویژگی‌های هیدرولیکی این آزمایش‌ها به صورت مقادیر میانگین ارائه شده است. اندازه‌گیری سرعت‌ها و تنش‌های برشی نقطه‌ای در ۴ عمق مختلف جریان و در دو حالت کوچکتر و بزرگتر از شعاع لوله انجام شده است.

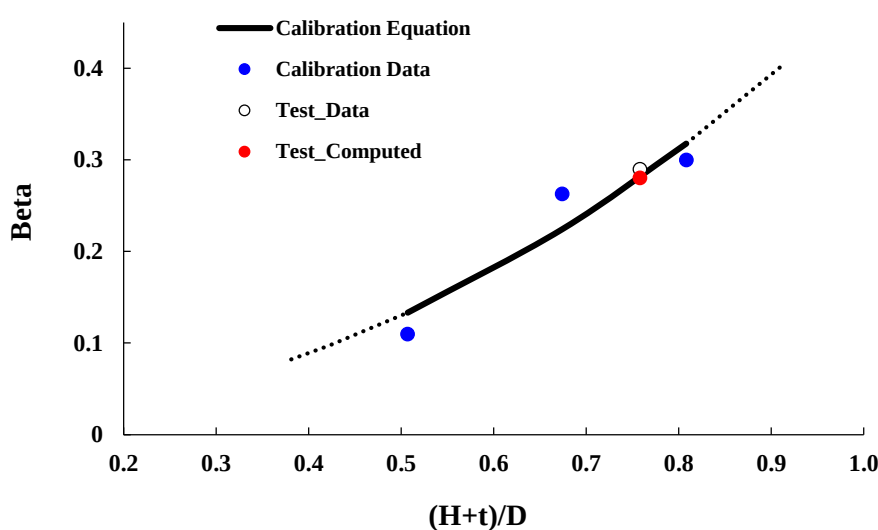
جدول ۱- خلاصه مقدارهای آزمایشگاهی پارامترهای هیدرولیکی (Sterling, 1998)

Run	Flow depth H (mm)	Flow rate Q (ls ⁻¹)	Flow velocity V (ms ⁻¹)	Shear stress τ (Pa)	Froude Number (Fr)	Reynolds Number (Re)	Shear Reynolds (Re ^{τ})
۱	۴۰/۷	۴/۴۴	۰/۴۵	۰/۶۱	۰/۷۲	۵۵۰۰۰	۲/۲
۲	۸۱/۵	۱۲/۳	۰/۶۳	۰/۹۷	۰/۶۹	۱۱۴۰۰۰	۲/۹
۲	۱۰۲/۰	۱۷/۳	۰/۷۱	۱/۰۷	۰/۶۷	۱۵۱۰۰۰	۳/۰
۴	۱۱۴/۲	۱۹/۹	۰/۸۳	۱/۱۱	۰/۷۲	۱۸۴۰۰۰	۳/۱

یافته های پژوهشی

واسنجی ضرایب λ و β

با استفاده از الگوریتم بهینه سازی اشاره شده در بخش های قبلی، مقادیر ضرایب لزجت گردابه ای و جریان های ثانویه در لوله واسنجی شدند. نتایج واسنجی این ضرایب نشان داد که ضریب λ برای عمق های مختلف جریان بین ۰/۰۰۵ و ۰/۰۰۷ متغیر است و بنابراین می توان از مقدار میانگین ۰/۰۰۶ استفاده نمود. برای ضریب β وضعیت تا حدودی متفاوت است. ابتدا این ضریب برای ۳ عمق جریان، واسنجی شد و سپس به کمک معادله به دست آمده، برای یک عمق جدید مورد آزمون قرار گرفت. در شکل ۸ نتایج مقادیر واسنجی و آزمون این ضریب نشان داده شده است. مشاهده می شود که معادله استخراج شده برای مقادیر واسنجی دارای دقت مناسبی است، به طوری که مقدار ضریب جریان ثانویه را برای حالت آزمون با دقت مناسبی برآورد نموده است. به کمک منحنی این شکل، می توان ضریب را برای هر عمق نسبی دلخواه تخمین نمود.



شکل ۸- نتایج مقادیر ضریب جریان های ثانویه در مراحل واسنجی و آزمون

نتایج توزیع عرضی سرعت و تنش برشی

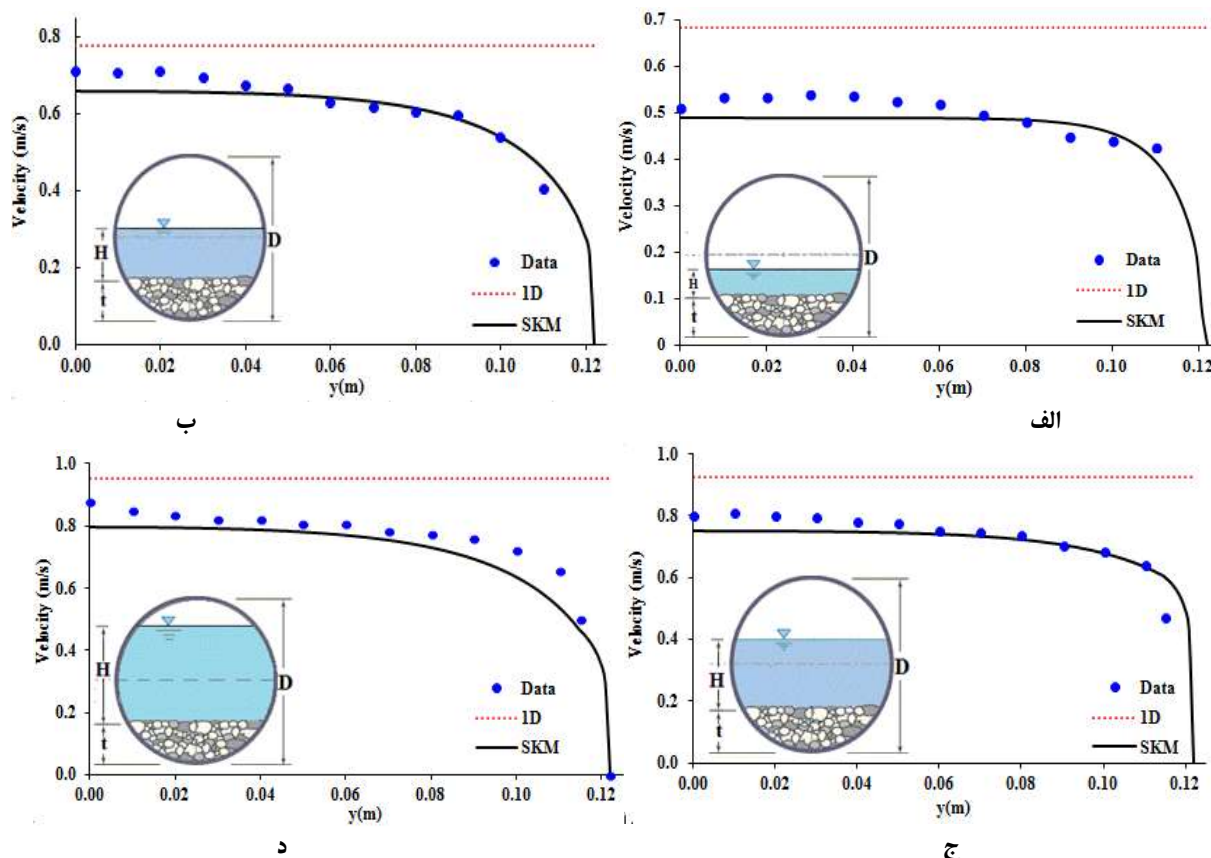
با مشخص شدن ضرایب مدل شیونو و نایت، اکنون می توان مدل را برای هر عمقی از جریان اجرا نمود. نتایج این اجراها برای توزیع عرضی سرعت جریان در شکل ۹ و به ازاء ۴ عمق جریان نشان داده شده است. در این شکل ها، نتایج پروفیل های سرعت مشاهداتی و نیز سرعت متوسط جریان به دست آمده از معادله مانینگ هم نشان داده شده است. تقریباً در تمامی عمق های جریان، مطابقت توزیع عرضی سرعت مشاهداتی و محاسباتی در تمامی عرض لوله قابل قبول می باشد. خطای متوسط مدل ریاضی در برآورد سرعت حدود ۶ درصد و حداکثر این خطا حدود ۷/۱ درصد است که برای حداقل عمق جریان (۴۰/۷ میلی متر) به دست آمده است.

همچنین در این شکل ها مشاهده می شود که در تمامی عمق های جریان، سرعت متوسط به دست آمده از معادله مانینگ از هر دو سرعت محاسباتی و مشاهداتی بیشتر است. بیشترین خطای فرمول مانینگ (حدود ۳۷ درصد) در حالت کمترین عمق جریان (۴۰/۷ میلی متر) اتفاق افتاده است. بعد از محاسبه توزیع عرضی سرعت، می توان دبی جریان را از انتگرال گیری عرضی از این توزیع به دست آورد. این نتایج در شکل ۱۰ و برای همه عمق های جریان محاسبه شده است. در این شکل، نتایج فرمول مانینگ هم نشان داده شده است. مشاهده می شود که نتایج منحنی دبی-اشل به دست آمده از مدل شیونو و نایت در مقایسه با نتایج فرمول مانینگ، مطابقت بسیار بهتری با داده های آزمایشگاهی دارد.

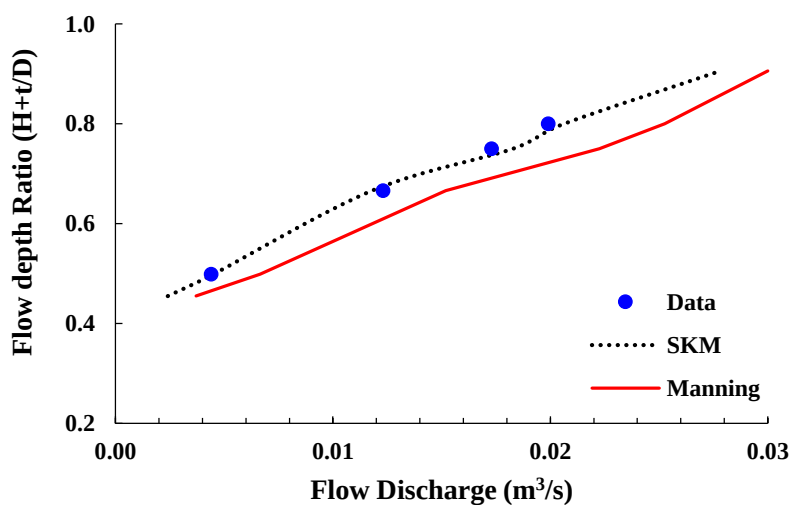
در شکل ۱۱ نتایج محاسبات توزیع عرضی تنش برشی مرزی از دو روش متداول (یک بعدی) و شیونو و نایت (دوبعدی) به همراه نتایج مشاهداتی نشان داده شده است. برخلاف توزیع عرضی سرعت جریان، تغییرات مقادیر تنش برشی مشاهداتی در عرض لوله در اغلب عمق های جریان چندان قابل ملاحظه نیست، به طوریکه تنش برشی متوسط تقریباً با تنش های برشی نقطه ای اختلاف زیادی ندارد. همچنین مشاهده می شود که روش یک بعدی، اختلاف زیادی با داده های مشاهداتی داشته و عملاً مقادیر بسیار بزرگتری را ارائه می دهد. خطای متوسط این روش



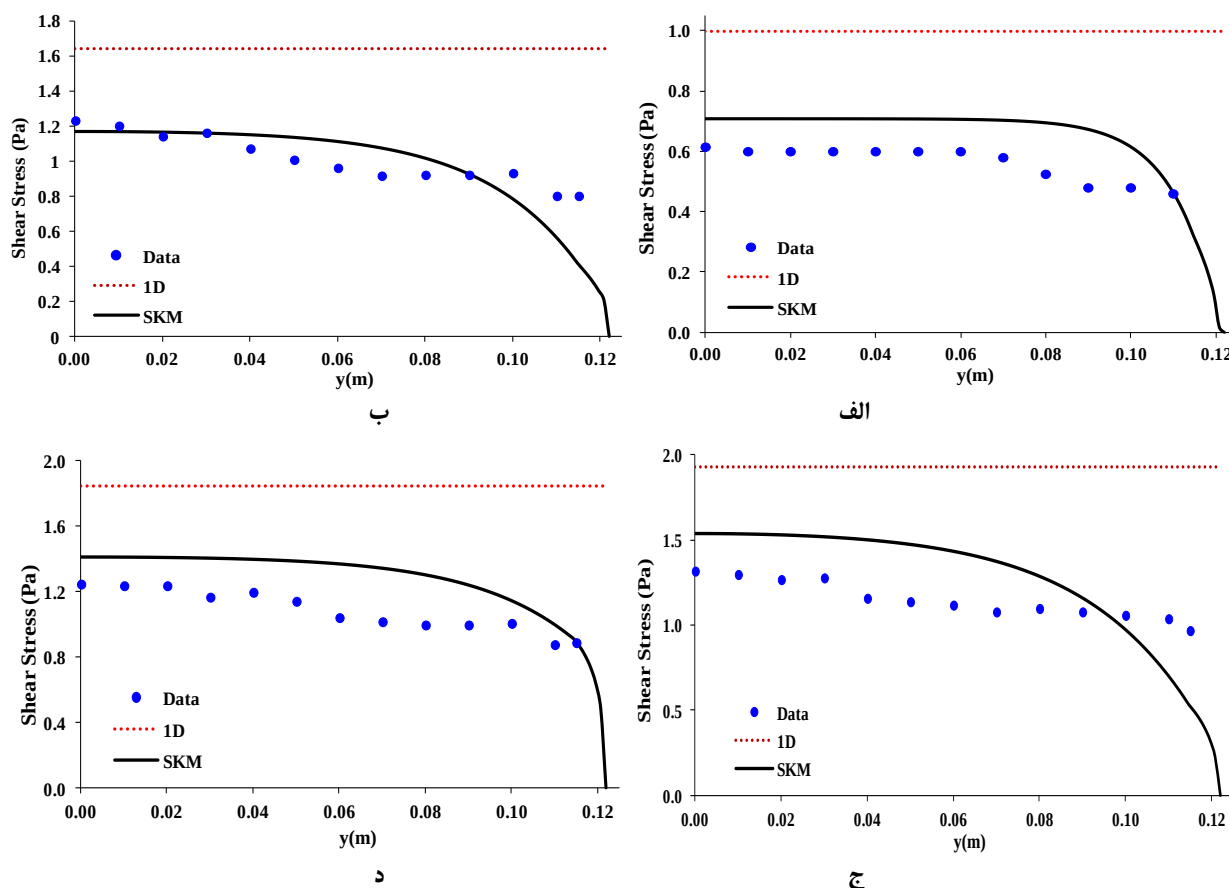
حدود ۷۲/۲ درصد و حداکثر خطای آن حدود ۷۹/۷ می‌باشد که برای حداقل عمق جریان اتفاق افتاده است. نتایج مدل شیونو و نایت اگرچه با داده‌های مشاهداتی، مطابقت خوبی ندارند اما تا حدود زیادی بهتر از روش یک‌بعدی بوده و برای تخمین اولیه‌ای از تنش برشی در لوله قابل استفاده می‌باشند. خطای متوسط این روش در تخمین تنش برشی کف این لوله حدود ۱۸/۵ درصد و حداکثر آن ۲۲ درصد می‌باشد.



شکل ۹- توزیع عرضی سرعت به ازاء عمق‌های مختلف جریان در یک لوله رسوبی نیمه‌پر
الف) (۴۰/۷، ب) (۸۱/۵، ج) (۱۰۲/۶ و د) (۱۱۴/۲ میلی‌متر)



شکل ۱۰- مقایسه منحنی‌های دبی-اشل محاسباتی (مانینگ و شیونو و نایت) و مشاهداتی در لوله رسوبی نیمه‌پر مورد مطالعه



شکل ۱۱- مقایسه نتایج محاسباتی و مشاهداتی توزیع عرضی تنش برشی به ازاء عمق های مختلف جریان در یک لوله رسوبی نیمه پر (الف) ۴۰/۷، (ب) ۸۱/۵، (ج) ۱۰۲/۶ و (د) ۱۱۴/۲ میلی متر

بحث و نتیجه گیری

در این مطالعه، از حل یک مدل شبه دوبعدی ساده و کاربردی مبتنی بر هیدرودینامیک جریان برای شبیه سازی توزیع عرضی سرعت جریان و تنش برشی بستر و نیز استخراج منحنی دبی-اشل در لوله های رسوبگذار نیمه پر استفاده شد. این راهکار به عنوان یک گزینه قابل قبول به جای مدل های یک بعدی متداول و نیز مدل های دو و سه بعدی مبتنی بر حل معادلات ناویر-استوکس معرفی و پیشنهاد شده است. نتایج حل این مدل برای توزیع عرضی سرعت و استخراج منحنی دبی-اشل یک لوله رسوبگذار نیمه پر نشان داد که:

نتایج به دست آمده دارای دقت مناسبی بوده و استفاده از مدل شبه دوبعدی مورد بررسی در این تحقیق می تواند تا ۳۰ درصد خطای محاسبات دبی جریان را در مقایسه با فرمول مانینگ که کاربرد گسترده ای در حل مباحث هیدرولیک جریان در لوله های نیمه پر دارد، کاهش داده و جواب های دقیق تری ارائه دهد.

برای توزیع عرضی تنش برشی هم چند شبیه سازی به کمک مدل شیونو و نایت در عمق های مختلف جریان انجام شد. نتایج این بخش نشان داد که تخمین مقادیر تنش برشی بستر در لوله های رسوبگذار نیمه پر در مقایسه با مقادیر سرعت جریان دارای دقت کمتری است و حدود ۱۸/۵ درصد با مقادیر واقعی تنش برشی اختلاف دارد. ذکر این نکته لازم است که خطای رابطه معمول که کاربرد زیادی در تخمین تنش برشی در رودخانه ها و مجاری روباز دارد، بیش از ۷۲ درصد است. بنابراین نتایج مدل شیونو و نایت به عنوان جواب های اولیه و مقدماتی، به خوبی نیاز محققین در طراحی و مدیریت سازه های آبی را برطرف می کند.

زبری ناشی از رسوبات ته نشین شده در کف لوله تاثیر زیادی بر مقدار سرعت جریان و توزیع آن دارد و مشخص سازی مقدار دقیق ضریب زبری مانینگ برای نواحی رسوب گذاری شده با عدم قطعیت هایی همراه است. به همین دلیل در این تحقیق استفاده از ارتفاع زبری معادل (k_s) به جای ضریب زبری مانینگ مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان داد که استفاده از ارتفاع زبری معادل می تواند دقت مدل ریاضی مورد بررسی را افزایش دهد.

برای تخمین ضریب بدون بعد لزجت گردابه ای (λ) در این تحقیق و با توجه به عدم وجود مقادیری استاندارد برای آن در لوله های



نیمه‌پر، از یک الگوریتم بهینه‌سازی استفاده شد. نتایج بهینه‌سازی این ضریب نشان داد که ضریب λ برای عمق‌های مختلف جریان بین $0/005$ و $0/007$ متغیر است و بنابراین می‌توان از مقدار میانگین $0/006$ استفاده نمود.

برای ضریب جریان‌های ثانویه (β) با استفاده از مقادیر بهینه‌سازی شده، معادله‌ای به‌دست آمد که دارای دقت مناسبی در تخمین این ضریب در هر عمق نسبی جریان دلخواه است، به‌طوری‌که مقدار ضریب جریان ثانویه را برای حالت آزمون با دقت مناسبی برآورد می‌کند. از این روش می‌توان برای دیگر لوله‌های رسوبگذار نیز استفاده کرد و ضمن ارزیابی معادله به‌دست آمده در این تحقیق، معادلات دقیق‌تری برای لوله مورد نظر ارائه داد.

مدل شبه‌دوبعدی شیونو و نایت با استفاده از معادلات مورد بررسی در این تحقیق، کارایی و دقت بالایی را در برآورد توزیع سرعت جریان و تنش برشی در عرض لوله‌های نیمه پر و رسوبگذار داشته و می‌تواند جایگزین بسیار خوبی برای مدل‌های یک بعدی مرسوم و مورد استفاده در این حوزه باشد.

ملاحظات اخلاقی

حامی مالی

این پژوهش با حمایت مالی معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان تحت قرارداد ۶۹-۵۲۵-۰۴ انجام شده است.

مشارکت نویسندگان

نویسندگان به طور مساوی در کلیه مراحل طراحی و انجام پژوهش، گردآوری داده‌ها، تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها، تحلیل و تفسیر اطلاعات و نتایج، تهیه پیش‌نویس مقاله، بررسی و کنترل نتایج، اصلاح، بازبینی و نهایی‌سازی مقاله مشارکت داشتند.

اعلامیه هوش مصنوعی مولد و فناوری‌های مبتنی بر هوش مصنوعی در فرایند نگارش نویسندگان در فرایند نگارش مقاله از هیچ ابزار و یا نرم‌افزار هوش مصنوعی استفاده نکرده‌اند.

بیانیه دسترسی به داده‌ها

تمامی داده‌های مورد استفاده در محاسبات این مقاله از طریق ارتباط با نویسنده مسئول قابل دریافت است.

سپاسگزاری

از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان به‌خاطر حمایت مالی و همکاری در اجرای پژوهش حاضر سپاسگزاری می‌شود.

پیروی از اصول اخلاق پژوهش

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این پژوهش علمی رعایت نموده‌اند و این موضوع مورد تأیید همه آنها است.

تعارض منافع

بنا بر اظهار نویسندگان این مقاله تعارض منافع ندارد.

منابع

ظهیری، عبدالرضا و شریفی، سروش (۱۴۰۴). توزیع عرضی سرعت جریان در مجاری روباز دایره‌ای. مجله هیدرولیک، (۳)، ۲۰، ۱۲۴-۱۰۹.

REFERENCES

- Abbs, T.J., Kells, J.A., and Katopodis, C. 2007. A model study of the hydraulics related to fish passage through backwatered culverts. 18th Canadian Hydrotechnical Conference Challenges for Water Resources Engineering in a Changing World. Winnipeg, Manitoba, Canadian Society of Civil Engineers.
- Akgiray, O. 2004. Simple formulae for velocity, depth of flow, and slope calculations in partially filled circular pipes. Environmental Engineering Sciences, 21(3), 371-385.
- Alawadi, W., Al-Rekabi, W.S., Al-Aboodi, A.H., 2018. Application of the Shiono and Knight method in asymmetric compound channels with different side slopes of the internal wall. Applied Water Science,

- 8(4). <https://doi.org/10.1007/s13201-018-0663-4>
- Alihosseini, M., and Thamsen, T.U. 2019. Numerical and experimental investigation of flow in partially filled sewer pipes. *Technische Mechanik*, 39(1), 113-124. DOI:10.24352/UB.OVGU-2019-011
- Azamathula, H.M.D., Ghani, A.Ab., and YenFei, S. 2011. ANFIS based approach for predicting sediment transport in clean sewer. *Applied Soft Computing*, 12, 1227-1230.
- Camp, T.R. 1946. Design of sewers to facilitate flow. *Sewage Works J.*, 18, 3-16.
- Funamizu, N., Yamashita, S., and Takakuwa, T. 1991. A uniform flow formula for the partially full flow in a circular pipe. *Bulletin of Faculty of the Engineering Hokkaido University*, 155, 1-9.
- Guo, J., Mohebbi, A. Zhai, Y. and Clark, S.P. 2015. Turbulent velocity distribution with dip phenomenon in conic open channels. *J. Hydraulic Research*, 53, 73-82.
- Jiang, Y., Li, B., and Chen, J. 2016. Analysis of the velocity distribution in partially-filled circular pipe employing the principle of maximum entropy. *PLoS ONE*, 11(3), e0151578. doi.org/10.1371/journal.pone.0151578
- Kehler, N.J. 2009. Hydraulic characteristics of fully developed flow in circular culverts. Winnipeg, Manitoba: M.Sc. Thesis, University of Manitoba.
- Koutsospyrou, V., Sander, G., El-Hamalawi, A., Wallace, D., and Croft, M. 2025. Measuring variable discharge under partially full pipe flow. *Processes*, 13, 1089. <https://doi.org/10.3390/pr13041089>
- Li, W., Zhang, Q., Luo, X., and Chen, X. 2018. New method of flow measurements based on CFD for partially filled pipe. *Proceedings of the 2018 International Conference on Mathematics, Modeling, Simulation and Statistics Application (MMSSA 2018)*, Shanghai, China. doi.org/10.2991/mmssa-18.2019.12
- Mohebbi, A. 2014. Turbulent circular culvert flow: Implications to fish passage design. PhD Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Nebraska-Lincoln, 122p.
- Morrison, R.R., Hotchkiss, R.H., Stone, M., Thurman, D., and Horner-Devine, A.R. 2009. Turbulence characteristics of flow in a spiral corrugated culvert fitted with baffles and implications for fish passage. *Ecological Engineering*, 35(3), 381-392.
- Rameshwaran, P., and Shiono, K. 2007. Quasi two-dimensional model for straight overbank flows through emergent. *J. Hydraul. Res.*, 45(3), 302-315.
- Regueiro-Picallo, M., Naves, J., Jerónimo Puertas, J.A. and Suárez, J. 2016. Experimental and numerical analysis of egg-shaped sewer pipes flow performance. *Water*, 8, 1-9.
- Schall, J.D., Thompson, P.L., Zerges, S.M., and Kilgore, R.T. 2012. Hydraulic design of highway culverts: Hydraulic Design Series, Number 5. Federal Highway Administration.
- Shiono, K., and Knight, D.W. 1991. Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *J. Fluid Mechanics*, 222, 617-646.
- Sterling, M. 1998. A study of boundary shear stress, flow resistance and the free overfall in open channels with a circular cross section. PhD Thesis, Faculty of Civil Engineering, University of Birmingham, UK.
- Sterling, M., and Knight, D.W. 2000. Resistance and boundary shear in circular conduits with flat beds running part full. *Proc. Instn Civ. Engrs Water & Mar. Engng*, 229-240.
- Yoon, J.-I., Sung, J., and Lee, M.H. 2012. Velocity profiles and friction coefficients in circular open channels. *J. Hydraulic Research*, 50(3), 1-8.
- Zahiri, A., and Sharifi, S. 2025. Lateral velocity distribution in circular open channels. *J. Hydraulics*, 20(3), 109-124. <https://doi.org/10.30482/jhyd.2024.480078.1721>. (in Persian)
- Zeghadnia, L., Robert, J.L., and Achour, B. 2019. Explicit solutions for turbulent flow friction factor: A review, assessment and approaches classification. *Ain Shams Engineering Journal*, 10(1), 243-252.