

ارائه یک حل تحلیلی برای برآورد خط فریاتیک جریان متلاطم توسعه یافته زیر سطحی

چکیده

در این پژوهش یک حل تحلیلی با فرض جریان غیرداری و متلاطم توسعه یافته درون مصالح درشت‌دانه ارائه شده است. برای این منظور از دو نوع مصالح درشت‌دانه گردگوشه و تیزگوشه، با نفوذپذیری‌هایی به ترتیب 0.39 و 0.43 متر بر ثانیه تحت اثر شیب ملایم 4% درصد و در شرایط مرزی تراز آب بالادست و پایین‌دست مختلف محاسبات انجام شد و در نهایت با مدل آزمایشگاهی صحت‌سنجی گردید. بررسی پروفیل جریان درون مصالح درشت‌دانه نشان داد، با افزایش نفوذپذیری مقدار خطای حل تحلیلی این پژوهش کمتر شده و در مقابل خطای حل تحلیلی Jager (1956) افزایش یافته است. حداقل و حداکثر درصد خطای حل تحلیلی این پژوهش در شیب 4% درصد گردگوشه نسبت به مدل آزمایشگاهی در سه حالت تراز آب بالادست و پایین‌دست مختلف به ترتیب 5.73% و 12.75% درصد حاصل شده، این در حالی است که مقدار خطا برای حل تحلیلی Jager (1956) دارای مقدار حداقل و حداکثر 11.7% و 13.17% درصد به دست آمده است. در شیب 4% درصد تیزگوشه میزان خطا در حل تحلیلی این پژوهش به میزان 5.6% و 10.09% درصد کاهش یافته است و در مقابل درصد خطای حل Jager (1956) به میزان 14.75% و 15.33% درصد افزایش یافته، که این موضوع دلیل محکمی برای پذیرش این حل می‌تواند باشد زیرا که اساس فرض این حل تحلیلی، برای جریانات با نفوذپذیری بالا یا به اصطلاح سرعت زیاد (جریان‌های غیرداری) مطرح شده است. بنابراین نتایج حاصل از این پژوهش نشان داد حل تحلیلی ارائه شده بر اساس فرضیات اشاره شده در بالا نتایج خوبی ارائه می‌نماید که در مقایسه با حل تحلیلی دیگر پژوهشگران به مراتب دقیق‌تر می‌باشد.

کلمات کلیدی: جریان غیرداری، حل تحلیلی، خط فریاتیک، مصالح درشت‌دانه.

An analytical solution for estimating the phreatic line of fully developed subsurface turbulent flow

Abstract

In this study, an analytical solution was developed based on the assumptions of the fully developed turbulent flow within coarse materials. For this purpose, calculations were performed using two types of coarse materials, rounded and angular with permeability of 0.39 and 0.43 m/s, respectively, under a gentle slope of 4% and various upstream and downstream water level boundary conditions. Finally, the results were validated using a laboratory model. Investigation of the flow profile within coarse materials showed that as permeability increases, the error of this study's analytical solution decreases, while the error of Jager's (1956) analytical solution increases. That is, for a 4% slope with rounded grains, the minimum and maximum percentage errors of this study's analytical solution compared to the laboratory model under three different upstream and downstream water level conditions were 5.73% and 12.75% , respectively. In contrast, the error for Jager's (1956) analytical solution ranged from a minimum of 11.7% to a maximum of 13.17% . For a 4% slope with angular grains, the error in this study's analytical solution decreased to 5.6% and 10.09% , while the error for Jager's (1956) solution increased to 14.75% and 15.33% . This provides strong evidence for the validity of the proposed solution, as it is fundamentally based on the assumption of high-velocity flows (non-Darcy flows). Therefore, the results of this research show that the

proposed analytical solution, based on the assumptions mentioned above, yields satisfactory results and is significantly more accurate compared to the analytical solutions of other researchers.

Keywords: *Analytical solution, Coarse materials, Non-Darcy flow, Phreatic line.*

ویرایش نهایی

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Flow of water in soils have long been of interest to researchers in soil science, petroleum engineering, environmental sciences, and groundwater hydrology. Darcy's law is an empirical relationship that has been extensively applied to date and is considered the fundamental and constitutive equation governing flow in porous media. When the assumptions underlying Darcy's law are violated, its formulation must be adopted. Numerous experimental investigations have repeatedly demonstrated deviations from Darcy's law, and considerable efforts have therefore been devoted to modifying or extending Darcy's law under such conditions. Various terms, including non-Darcy flow, turbulent flow, inertial flow, and high-velocity flow, have been employed to describe fluid behavior in coarse porous media (Zeng and Grigg, 2006).

Method

In this study, an analytical solution based on the assumptions of non-Darcy flow and fully developed turbulent conditions was developed to investigate the flow profile within coarse materials. To this end, calculations were conducted for two types of coarse materials, rounded and angular with hydraulic permeability of 0.39 and 0.43 m/s, respectively, under a mild slope of 4% and various upstream and downstream boundary conditions. The porosity of the gravel materials was determined using a direct measurement method. A tank ($0.48 \times 0.69 \times 0.69$ m) was filled with gravel and saturated with water to determine pore volume, yielding porosities of 52% for angular (crushed) materials and 44% for rounded gravel. Measurements were repeated three times and averaged. Flow at the downstream end of the flume was free, with no outflow control applied.

Results

In this section, the results of the analytical solution are evaluated and compared with the experimental data. Furthermore, to assess the accuracy of the proposed analytical solution, comparisons were conducted with previously published formulations, including those of Jager (1956), Chapman (1957), Bear (1972), Castro-Orgaz (2011), and Di Nucci (2015), whose governing equations are presented above. The comparative analysis indicates that among these formulations, only the relationship proposed by Jager (1956) was capable of adequately reproducing the flow profile, whereas the other models failed to capture the observed flow behavior. Consequently, the analytically derived flow profile is compared with both the experimental model of Sedghi-Asl (2010) and the analytical model of Jager (1956). Finally, the strengths and limitations of the proposed analytical model and those reported in previous studies are systematically identified and discussed.

An important advantage of the equation proposed in this study over the formulation of Jager (1956) is its ability to estimate the phreatic line profile using only the downstream boundary condition. In contrast, the solution method of Jager (1956) relies on both upstream and downstream boundary

conditions; consequently, when one of these boundary conditions is unavailable, the method is unable to reconstruct the flow profile, which constitutes a limitation of the Jager (1956) formulation. Therefore, given that subcritical flow is controlled by downstream conditions and that, in porous media, the Froude number is less than unity, implying that the flow regime is inherently subcritical, the downstream boundary condition should be selected as the starting point for the computations, while the upstream boundary should be left unconstrained. This approach allows a rigorous assessment of the robustness and applicability of the proposed solution method.

Conclusions

In conclusion, for highly permeable materials, commonly referred to as non-Darcy porous media, the formulations proposed by Jager (1956), Chapman (1957), Bear (1972), Castro-Orgaz (2011), and Di Nucci (2015) are unable to accurately estimate the flow profile. In contrast, the analytical solution presented in this study demonstrates satisfactory accuracy and can be effectively employed to predict the flow profile within coarse-grained porous media. This study indicates that the proposed analytical solution, developed under the assumptions of fully developed turbulent flow within coarse materials, yields reliable results for mild slopes. As demonstrated by the results, the accuracy of the proposed analytical solution is significantly higher than that of the Jager (1956) formulation. A noteworthy observation in the analysis of the flow profile within the porous medium is that, with increasing permeability, the error associated with the proposed analytical solution decreases, whereas the error of the Jager (1956) solution increases. This contrasting behavior provides strong justification for the validity of the proposed solution, as its underlying assumptions are specifically formulated for high-permeability or, equivalently, high-velocity (non-Darcy) flow conditions.

Author Contributions

Conceptualization, E.A., M.S. and M.M.; methodology, E.A. and M.S.; software, E.A.; validation, E.A., M.S. and M.M.; formal analysis, E.A., M.S. and M.M.; investigation, E.A., M.S. and M.M.; writing—original draft preparation, E.A.; writing—review and editing, M.S. and M.M.; visualization, E.A.; supervision, M.S. and M.M. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript Data Availability Statement Data is available on reasonable request from the authors.

Acknowledgements

The authors would like to thank all participants of the present study.

Ethical considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, plagiarism, and misconduct.

Conflict of interest

The authors declare no conflict of interest.

مقدمه

جریان آب در خاک و مسائل وابسته، توسط دانشمندان علوم خاک، نفت، محیط زیست و هیدرولوژی آبهای زیرسطحی از دیرباز تاکنون مورد توجه بوده است. رابطه داری یک رابطه تجربی-تحلیلی است و تا حال حاضر بطور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته و رابطه اساسی و ساختاری جریان در محیط‌های متخلخل بشمار می‌رود.

در صورت عدول از شرایط داری لازم است تدابیر دیگری اندیشیده شود. معمولاً اگر سیال مورد نظر گاز و یا سیال با لزجت پایین باشد، احتمال آرام بودن جریان عبوری کم می‌باشد. پژوهش‌های آزمایشگاهی به کرات انحراف از قانون داری را نشان داده‌اند و کوشش‌های زیادی برای اصلاح قانون داری در شرایط فوق‌الذکر صورت گرفته است. عبارات مختلفی چون جریان غیرداری، جریان متلاطم، جریان اینرسی، و جریان با سرعت‌های بالا برای تشریح رفتار سیال در محیط‌های متخلخل در شت‌دانه به‌کار رفته است (Zeng and Grigg, 2006).

پیشینه پژوهش

روابط جریان غیرداری

از جمله مهم‌ترین روابط غیرداری شامل موارد ذیل است که هر کدام از روابط با نمونه معادلات مربوطه تشریح شده است.

روابط درجه دوم

چنانچه جریان درون محیط سنگریز دربرگیرنده محدوده وسیعی از رژیم‌های جریان باشد، فرم درجه دوم نسبت به فرم توانی، جواب‌های بهتری می‌دهد. همه روابط ارائه شده در این زمینه در ادامه کار فرشهایمر (۱۹۰۱) می‌باشند. فرشهایمر (۱۹۰۱) یک عبارت درجه دوم را که بیان کننده اثر غیرداری است، به قانون داری اضافه و رابطه داری را به صورت زیر اصلاح کرد (Zeng and Grigg, 2006).

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\mu V}{k} + \beta \rho V^2 \quad \text{رابطه (۱)}$$

که در آن، P فشار، x جهت جریان سیال، μ لزجت دینامیکی سیال، V سرعت ظاهری سیال، k نفوذپذیری ذاتی محیط متخلخل، β ضریب جریان غیرداری و ρ دانسیته سیال می‌باشد.

روابط توانی

این معادلات معمولاً به‌صورت روابطی از گرادیان هیدرولیکی و سرعت بیان می‌شوند. معروفترین رابطه این دسته از معادلات، توسط Wilkins (1956) به‌صورت زیر ارائه گردیده است.

$$V_v = C \mu^a m^b i^\omega \quad \text{رابطه (۲)}$$

که در آن، V_v سرعت نشت جریان درون سنگریز، C ثابت تجربی که با توجه به شکل ذرات تعیین می‌گردد، μ لزجت دینامیکی آب، m پارامتری که بر میزان نفوذپذیری مصالح تاثیرگذار است، a, b, ω توان‌های تجربی می‌باشند.

روابط فاکتور اصطکاکی – عدد رینولدز

جمع کثیری از پژوهشگران سعی کردند به پیروی از نمودار مودی برای لوله‌ها، روابط مشابهی برای جریان درون مصالح سنگریز توسعه دهند، اما به دلیل عدم ارائه یک تعریف واحد از خصوصیت طولی به کار رفته در عدد رینولدز، نتوانستند به یک رابطه مفید و همه‌جانبه دست یابند. این دسته از محققان، قطر متوسط ذرات محیط متخلخل را به عنوان خصوصیت طولی تعریف کردند. اما نتایج آنها نشان داد که ارتباط بین عدد رینولدز و فاکتور اصطکاکی برای یک محیط متخلخل خاص نمی‌تواند نتایج قابل قبولی برای سایر محیط‌های متخلخل داشته باشد (Arbhabhirama and Dinoy, 1973).
(Arbhabhirama and Dinoy (1973) رابطه کلی زیر را ارائه کردند.

$$f_k = \frac{1}{R_w} + 100 \left[d \left(\frac{n}{k} \right)^{1/2} \right]^{-1.50} \quad \text{رابطه ۳}$$

که در آن، f_k فاکتور اصطکاکی بدست آمده از جذر نفوذپذیری ذاتی ($\sqrt{k}$) به عنوان یک خصوصیت طولی، R_w عدد رینولدز Ward که با استفاده از جذر نفوذپذیری ذاتی محیط ($\sqrt{k}$) بدست آمده است، d قطر متوسط ذرات محیط متخلخل، n تخلخل محیط متخلخل سنگریز و k ، نفوذ پذیری ذاتی محیط متخلخل می‌باشد.

Jager (1956) به ارائه‌ی روابط تحلیلی بر اساس فرضیات دوپوئی – فرشهایمر برای جریان ماندگار در آبخوان باز (آبخوان غیر تحت فشار یا آزاد) برای حالت عدم حضور تغذیه سطحی پرداخت. برای محاسبه بار آبی در هر نقطه، می‌توان از معادله ۴ استفاده نمود.

$$h^2 = h_0^2 - \left(\frac{h_0^2 - h_l^2}{l} \right) x \quad \text{رابطه ۴}$$

که در آن، h_0 عمق بالادست (متر)، h_l عمق پایین‌دست (متر)، L طول بستر (متر) و x فاصله هر نقطه نسبت به بالادست (متر) است.

Chapman (1957) بیان کرد رابطه ارائه شده توسط دوپوئی – فرشهایمر، ارتفاع صحیح سطح آب زیرزمینی رو به دست نمی‌دهد. وی عقیده داشت که در فرضیات دوپوئی – فرشهایمر جریان تماماً افقی فرض شده و از مولفه عمودی سرعت و در نتیجه، از وجود سطح تراوش در دیواره‌ی نهر پایین‌دست صرف‌نظر شده است وی معادله ۵ را به عنوان معادله‌ی سطح حقیقی آب زیرزمینی ارائه داد.

$$h^2 = h_0^2 - \frac{x}{l} [h_0^2 - (h_l + h_s)^2] \quad \text{رابطه ۵}$$

که در آن، h_0 عمق بالادست، h_l عمق پایین‌دست، h_s ارتفاع سطح نشت است.

Wright (1968) بررسی آزمایشگاهی و نظری جریان غیرخطی درون مصالح در شت‌دانه با استفاده از ستون خاک آزمایشگاهی و اگر با استفاده از همبستگی بین عدد رینولدز و ضریب مقاومت (فاکتور اصطکاکی) را انجام داد.

Childs (1971) به بررسی زهکشی آب زیرزمینی مستقر بر سطح شیب‌دار در حالت عدم حضور تغذیه سطحی به کمک روش‌های تقریبی و انتگرال‌های عددی با الهام گرفتن از تقریب دوپوئی – فرشهایمر در شرایط جریان ماندگار همت گماشت. وی در تحقیق خود به ارائه روابطی تقریبی برای جریان آب زیرزمینی پرداخت و به کمک رسم نمودارهایی سعی در بیان راه حل‌ها داشت.

Bear (1972) در کتاب دینامیک جریان درون محیط‌های متخلخل به ارائه روابط تحلیلی دوپوئی مربوط به جریان آب‌های زیرزمینی در حالت عدم حضور تغذیه سطحی پرداخت و رابطه زیر را برای جریان‌های ماندگار هیدرولیکی در محیط‌های همگن ارائه نمود.

$$h^2 = h_0^2 - \frac{2qx}{K} \quad \text{رابطه ۶}$$

که در آن، h_0 عمق بالادست، K ضریب هدایت هیدرولیکی و q نرخ جریان ورودی در واحد عرض است. Li et al. (1998) حل تحلیلی جریان روگذر و درون‌گذر سنگریز با استفاده از مفاهیم هیدرودینامیکی و طول اختلاط پرانتل را بررسی کردند.

Castro- Orgaz (2011) به ارائه رابطه‌ای برای حالت بدون تغذیه سطحی به‌وسیله‌ی معادلات دوپوئی - فاور به‌دست آمده از معادلات لاپلاس در مختصات منحنی الخط (که با به توان بردن بعضی از ترم‌های آن به‌دست آمده است) پرداختند. ایشان با استفاده از این معادلات بیان کردند که معادلات دوپوئی - فرشهایمر در واقع حالت خاصی از معادلات عمومی جریان هستند که تحت فرضیات و محدودیت‌های خاصی برقرار می‌شوند. رابطه‌ی تحلیلی ارائه شده به فرم زیر می‌باشد.

$$h = \frac{2}{3} \left(\frac{Q}{K} \right)^2 \exp \left[\left[-\frac{1}{3} \left(\frac{Q}{K} \right)^{-1} x \right] + \frac{2Q}{K} \left(\left(\frac{1}{3} \left(\frac{Q}{K} \right) - x \right) \right) + h_e^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{رابطه ۷}$$

که در آن، h_e عمق ورودی بالادست، h عمق در فاصله دلخواه x ، K ضریب هدایت هیدرولیکی و Q دبی جریان ورودی است. Sedghi-Asl et al. (2014a) به ارائه حل تحلیلی یک بعدی غیرداری درون مصالح درشت‌دانه در شرایط بستر شیب‌دار پرداختند، در آن پژوهش، توابع بی‌بعد برای ترسیم پروفیل خط فریاتیگ معرفی شده که در نهایت با داده‌های آزمایشگاهی و پژوهش پاولوفسکی که بر اساس شرایط داری بوده، مقایسه شد و نتایج بهتر و دقیق‌تری بدست آوردند.

Sedghi-Asl et al. (2014b) به بررسی یک بعدی جریان متلاطم کاملاً توسعه‌یافته درون محیط متخلخل شکسته متوسط در شرایط بدون شیب بستر پرداختند، که در نهایت، با ارائه توابع بی‌بعد و مقایسه با مدل تحلیلی پاولوفسکی و روش عددی توسعه‌یافته توسط Bari and Hansen (2002) به نتایج خیلی خوبی دست یافتند.

Di nucci (2015) مسائل مربوط به مرز آزاد جریان پایای (ماندگار) دوبعدی نشت از سد مستطیلی را بررسی کرد. آن تحقیق، شامل به‌دست آوردن محل مرز آزاد جریان و یافتن میدان سرعت و شتاب بود. وی با ارائه راه حل تحلیلی با استفاده از مدل تقریبی، رابطه زیر را ارائه نمود.

$$h_{(x)} = \sqrt{h_0^2 - \frac{2q}{K}x + \frac{2q^2}{3K^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{3K}{q}x\right) \right]} \quad \text{رابطه ۸}$$

که در آن، h_0 عمق بالادست، $h_{(x)}$ عمق آب در هر نقطه از طول مسیر، K ضریب هدایت هیدرولیکی و q نرخ جریان ورودی در واحد عرض و x طول بستر است.

Naderi (2017) به مطالعه با استفاده از یک فلوم آزمایشگاهی به بررسی وضعیت زهکشی جریان در شرایط تغییرپذیری خاک و تغذیه جریان سطحی پرداخت و نتیجه‌گیری کردند در شرایط دانه‌بندی درشت‌دانه روابط با بنیان-داری دقت خوبی در برآورد سطح ایستابی ندارند.

Castro- Orgaz et al. (2023) با آگاهی از دشواری‌های حل عددی جریان آب زیرزمینی در آبخوان‌های آزاد با سطح ایستابی متغیر، به ویژه مشکل تولید شبکه محاسباتی منظم در نزدیکی سطح فریاتیک خمیده، روش نگاشت سیگما را که پیش‌تر در مدل‌سازی امواج آب کاربرد داشته، برای نخستین بار به مسائل زهکشی جریان تراوش تعمیم داده‌اند. در این روش با تبدیل مرز متحرک سطح آب به مرزی ثابت، دامنه مسئله به شکل مستطیل درمی‌آید که استفاده از روش‌های تفاضل محدود مرتبه دوم را ممکن می‌سازد. (Zerihun (2025 با اشاره به اینکه جریان متلاطم در محیط‌های درشت‌دانه از قانون داری تبیعت نمی‌کند، از معادله فرشه‌ایمر برای لحاظ کردن اثرات غیرخطی نیروی دراگ استفاده کرده است. وی با تلفیق این معادله با معادلات ناویر-استوکس، یک مدل میانگین‌گیری‌شده از عمق برای شبیه‌سازی جریان تراوش آشفته ارائه داده است. نتایج مدل عددی او با داده‌های آزمایشگاهی تطابق خوبی داشته و نشان داده شده است که این روش، انحنای سطح فریاتیک و ارتفاع نقطه تراوش را با دقت مناسبی پیش‌بینی می‌کند.

هدف اصلی این پژوهش، ارائه یک حل تحلیلی جدید برای پیش‌بینی پروفیل خط فریاتیک در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه با در نظر گرفتن رفتار غیرداریسی جریان است. برخلاف اغلب راه‌حل‌های تحلیلی موجود که بر پایه قانون داریسی توسعه یافته‌اند یا به شرط مرزی بالادست وابسته هستند، در این مطالعه حل تحلیلی بر مبنای شرط مرزی پایین‌دست ارائه شده است. این ویژگی امکان محاسبه مستقیم پروفیل خط فریاتیک را در مسائلی که ارتفاع آب پایین‌دست معلوم است فراهم می‌سازد. همچنین، به منظور ارزیابی عملکرد مدل پیشنهادی، نتایج آن با داده‌های آزمایشگاهی (Sedghi-Asl (2010 و راه‌حل‌های تحلیلی موجود در ادبیات، از جمله مدل (Jager (1956، مقایسه شده است. در مجموع، هر یک از مطالعات قبلی با هدف، فرضیات و روش‌شناسی خاصی توسعه یافته‌اند و هر یک بخشی از مسائل جریان غیرداریسی در محیط‌های متخلخل را پوشش می‌دهند. پژوهش حاضر نیز با ارائه یک حل تحلیلی جدید بر پایه رابطه ایزباش و استفاده از شرط مرزی پایین‌دست، تلاش کرده است راهکاری ساده، کم‌هزینه و با دقت مناسب برای پیش‌بینی پروفیل خط فریاتیک ارائه دهد. با توجه به پیچیدگی رفتار جریان غیرداریسی، همچنان ظرفیت قابل توجهی برای توسعه مدل‌های تحلیلی جدید و رفع محدودیت‌های روش‌های موجود وجود دارد.

روش شناسی پژوهش

معرفی مدل تحلیلی (ریاضی)

در این بخش از پژوهش، به بررسی تحلیلی پروفیل جریان (خط فریاتیک) درون محیط متخلخل درشت‌دانه (زهکش‌های سنگریزه‌ای) تحت شیب‌های ملایم (۴ درصد) پرداخته شد. از آنجا که زهکش سنگریز دارای مصالح درشت‌دانه با نفوذپذیری و سرعت جریان بالا هستند، به همین دلیل استفاده از فرضیات داریسی منطقی نیست و بایستی از فرضیات غیرداریسی برای حل معادله جریان استفاده کرد. مراحل بدست آوردن معادلات به صورت زیر است. دبی در واحد عرض عبوری از یک لایه آبدار درشت‌دانه به صورت زیر می‌باشد.

$$q = v \cdot h \quad \text{رابطه ۹}$$

که در آن، v سرعت جریان، h متوسط عمق جریان آب زیرزمینی است. از آنجا که سرعت جریان در لایه‌های درشت‌دانه خطی و داریسی نمی‌باشد، بنابراین جریان از قانون غیرداریسی (رابطه ایزباش) پیروی می‌کند. معادله ایزباش، ارتباط بین سرعت و گرادیان هیدرولیکی را به صورت زیر نشان می‌دهد (Sedghi-Asl et al. (2014a).

$$i = \frac{dh}{dx} = av^b \quad \text{رابطه ۱۰}$$

که در آن، i یا $\frac{dh}{dx}$ گرادیان هیدرولیکی، v سرعت جریان و a, b ضرایب رابطه ایزباش می‌باشند. اگر جریان، متلاطم کاملاً توسعه یافته فرض شود، $b=2$ خواهد بود. پس رابطه ایزباش به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$i = \frac{dh}{dx} = av^2 \quad \text{رابطه ۱۱}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = \left(\frac{dh}{dx} \frac{1}{a} \right)^{0.5} \quad \text{رابطه ۱۲}$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۹)، رابطه (۱۳) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$q = \left(\frac{dh}{dx} \frac{1}{a} \right)^{0.5} h \quad \text{رابطه ۱۳}$$

با به توان ۲ رساندن طرفین رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$q^2 = \left(\frac{dh}{dx} \frac{1}{a} \right) h^2 \quad \text{رابطه ۱۴}$$

با بازآرایی معادله ۱۴ خواهیم داشت:

$$aq^2 dx = h^2 dh \quad \text{رابطه ۱۵}$$

با انتگرال گیری از معادله (۱۵)، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$aq^2 x = \frac{h^3}{3} + c \quad \text{رابطه ۱۶}$$

حال با جایگذاری شرط مرزی پایین دست به صورت $x=l$ و $h=h_0$ در معادله (۱۶) خواهیم داشت.

$$aq_0^2 l = \frac{h_0^3}{3} + c \rightarrow c = aq_0^2 l - \frac{h_0^3}{3} \quad \text{رابطه ۱۷}$$

حال با جاگذاری c (ثابت انتگرال) در معادله (۱۶) و با توجه به اینکه $q = q_0$ خواهیم داشت.

$$aq^2 \cdot x = \frac{h^3}{3} + aq_0^2 l - \frac{h_0^3}{3} \rightarrow \frac{h^3}{3} = aq^2 x - aq_0^2 l + \frac{h_0^3}{3} \quad \text{رابطه ۱۸}$$

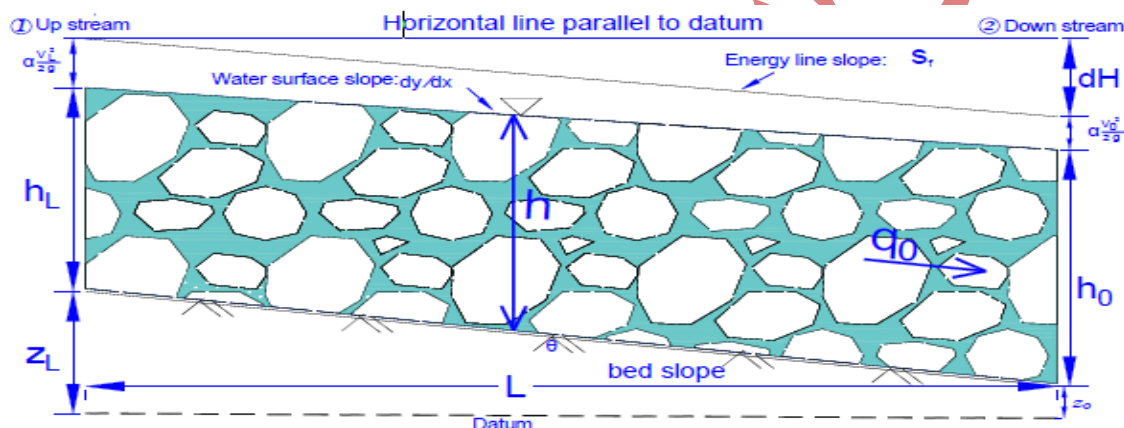
در نهایت با ساده سازی رابطه زیر بدست می‌آید.

$$h = [h_0^3 + 3 a q_0^2 (x - l)]^{\frac{1}{3}} \quad \text{رابطه ۱۹}$$

که در آن، h عمق پروفیل در هر نقطه، h_0 عمق پایین دست جریان، q_0 مقدار دبی در عرض واحد، x فاصله هر نقطه از بالادست، l طول کل جریان است و a پارامتری است که به مصالح سنگریز و وضعیت جریان وابسته است.

$$a = \frac{1}{(K \cdot i)^{0.5}} \quad \text{رابطه ۲۰}$$

که در آن، K هدایت هیدرولیکی مصالح محیط متخلخل، i گرادیان هیدرولیکی محیط متخلخل می باشد. این شکل از معادله (معادله ۲۰) به دلیل اعمال فرضیات جریان غیرداری و معادله افت فشار ایزباش با معادلات موجود در منابع متفاوت است و از طریق معادل سازی هدایت هیدرولیکی قانون داری و رابطه ایزباش بدست می آید (Sedghi-Asl, 2010). شکل زیر شمای کلی از محیط جریان را نشان می دهد.



شکل ۱. شمای کلی جریان متلاطم زیرسطحی

این حل تحلیلی از نظر فرم ریاضی با راه حل های تحلیلی ارائه شده در مطالعات پیشین تفاوت دارد و در عین سادگی، نیاز به پارامترهای کمتر و هزینه محاسباتی پایین، دقت قابل قبولی در پیش بینی پروفیل خط فریاتیک ارائه می دهد.

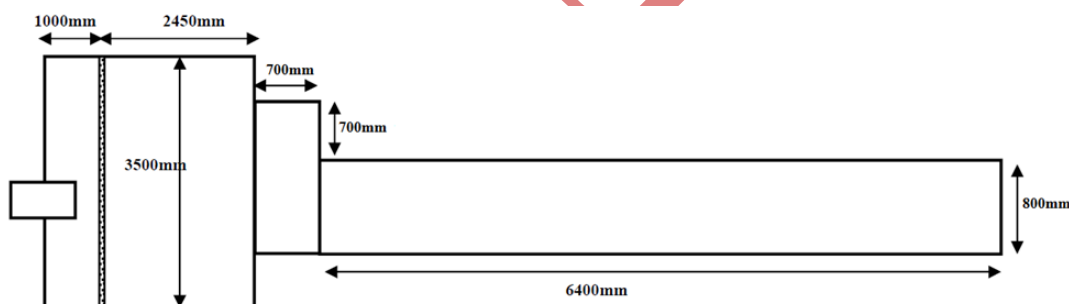
مدل آزمایشگاهی

مدل آزمایشگاهی که برای صحت سنجی، تجزیه و تحلیل پروفیل های جریان درون محیط متخلخل درشت دانه (زهکش های سنگریز) می باشد، توسط Sedghi-Asl (2010) در دانشگاه اشتوتگارت آلمان صورت گرفته است. این مدل یک کانال آزمایشگاهی دارای طول موثر ۶/۴ متر، عرض ۰/۸ متر و ارتفاع ۱ متر می باشد. مصالح شامل دو نوع گردگوشه و تیزگوشه (شکسته) تحت شیب بستر ۴ درصد با متوسط قطر ذرات شکسته (تیزگوشه) و گردگوشه (تیزگوشه) به ترتیب ۷۸ و ۷۷/۵ میلیمتر و ضریب تغییرات برای سنگدانه های گردگوشه و تیزگوشه (شکسته) به ترتیب ۱۵/۰۲ و ۲۰/۶۶ درصد بدست آمدند. نمودار فراوانی سنگدانه ها دارای شکل تقریباً نرمالی بود؛ تخلخل مصالح سنگریز با استفاده از روش اندازه گیری مستقیم تعیین شد. بدین ترتیب یک مخزن به ابعاد ۰/۴۸ در ۰/۶۹ در ۰/۶۹ متر از مصالح سنگریز پر گردید و سپس مقداری آب به آن اضافه گردید تا حجم منافذ پر گردد، در نهایت مقدار تخلخل مصالح سنگریز شکسته

(تیزگوشه) و گردگوشه مورد استفاده به ترتیب برابر ۵۲ و ۴۴ درصد تعیین گردیدند. شایان ذکر است که برای هر کدام از مصالح، عملیات تعیین تخلخل سه بار تکرار و با متوسط گیری حسابی، تخلخل میانگین تعیین گردید و مقدار تخلخل مصالح گردگوشه ۰/۳۹ و شکسته (تیزگوشه) ۰/۴۳ بدست آورده شد؛ ضمناً جریان در انتهای فلوم بصورت آزاد ریزش می کرد و هیچ کنترلی بر خروجی جریان از محیط سنگریز وجود نداشت. سرانجام، محاسبات با استفاده از حل تحلیلی برای هر دو نوع مصالح انجام و با مدل آزمایشگاهی مقایسه شده است. اشکال (۲) و (۳) به ترتیب نمای جانبی و شمای کلی از کانال آزمایشگاهی (Sedghi-Asl (2010) را نشان می دهد.



شکل ۲. نمای جانبی کانال آزمایشگاهی مربوط به مطالعه (Sedghi-Asl (2010)



شکل ۳. طرح پلان کانال آزمایشگاهی مربوط به مطالعه (Sedghi-Asl (2010)

بنابراین در آخر هر مرحله، مقدار خطای حاصله از مدل تحلیلی این پژوهش و سایر محققان برای شرایط مختلف هیدرولیکی (شرایط مرزی) با استفاده از تابع هدف نرمال NOF به صورت زیر مشخص و ارائه می گردد.

$$NOF = \frac{RMSE}{X} \quad \text{رابطه ۲۱}$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}{N}} \quad \text{رابطه ۲۲}$$

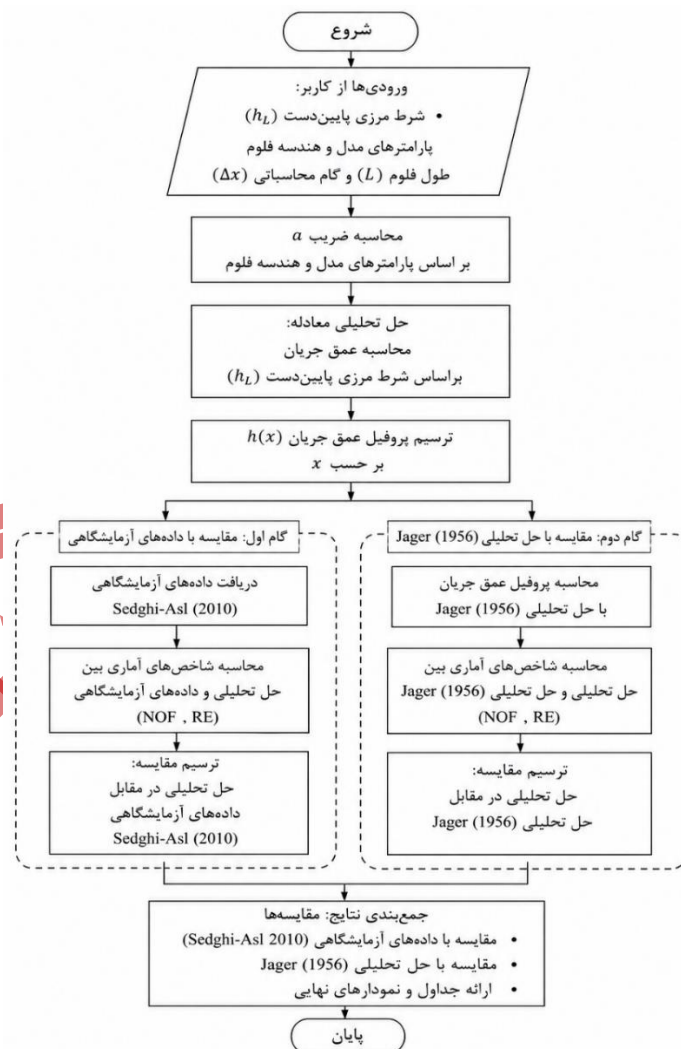
$$X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{رابطه ۲۳}$$

که در آن، RMSE نسبت میانگین مجذور خطا، N تعداد داده‌های حل تحلیلی، x میانگین داده‌های حل تحلیلی، x_i مقدار هر مرحله از داده‌های حل تحلیلی، y_i مقدار هر مرحله از داده‌های آزمایشگاهی است. هر چه NOF بیشتر باشد بیانگر اختلاف بیشتر و هر چه NOF کمتر باشد و به صفر نزدیکتر باشد، بیانگر همبستگی بالای بین نتایج حل تحلیلی با آزمایشگاهی می‌باشد. در بخش‌های زیر برای هر دو نوع مصالح گردگوشه و تیزگوشه و تحت تاثیر شرایط مرزی‌های مختلف، نتایج شامل مقایسه گرافیکی پروفیل سطح آب و جدول درصد خطا ارائه می‌شود. علاوه بر این، برای توزیع و پراکندگی مقدار خطا در هر نقطه از طول مسیر از رابطه خطای نسبی استفاده شده است.

$$RE = \frac{|h_A - h_E|}{h_E}$$

رابطه (۲۴)

که در آن، h_A مقدار عمق جریان مدل تحلیلی (ریاضیاتی)، h_E مقدار عمق جریان مدل آزمایشگاهی است. هر چه RE بیشتر باشد بیانگر تفاوت بالای نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی می‌باشد و هر چه RE کمتر باشد و به صفر نزدیکتر باشد بیانگر همبستگی بالای بین نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی می‌باشد. برای سهولت کار روندنمای روش اجرای پژوهش به صورت شکل ۴ نشان داده می‌شود.



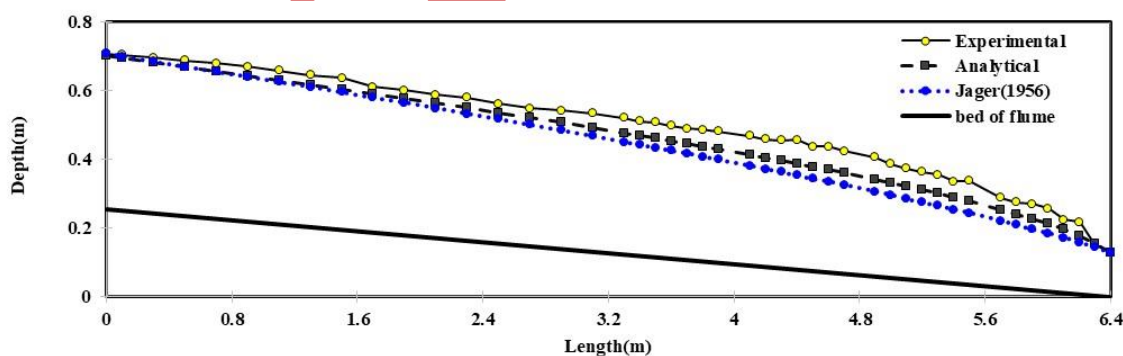
شکل ۴. روندنمای اجرای پژوهش حاضر

یافته‌های پژوهش

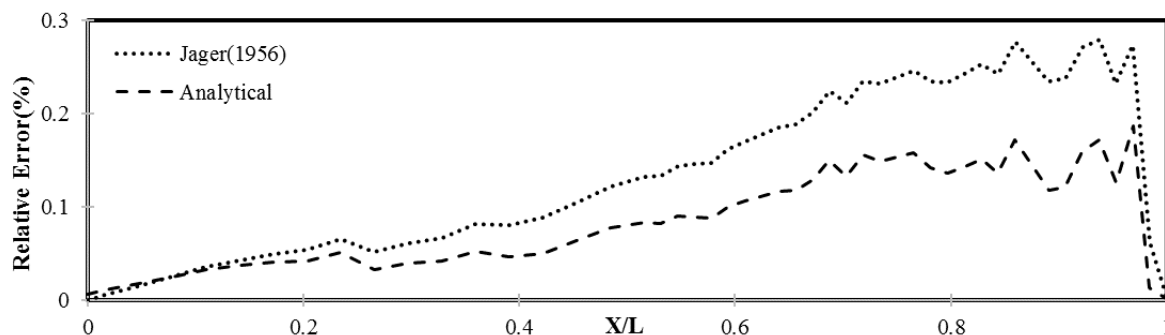
در این بخش از مطالعه، به ارزیابی نتایج حل تحلیلی و مقایسه آنها با داده‌های آزمایشگاهی پرداخته شد. علاوه بر این، برای دقت حل تحلیلی این پژوهش، مقایسه با معادلات دیگر محققین مانند Jager (1956), Chapman (1957), Bear (1972), Castro- Orgaz (2011) و Di nucci (2015) انجام گردید و معادلات این پژوهشگران در بالا آورده شده است که پس از بررسی و مقایسه تنها رابطه Jager (1956) توانست پروفیل جریان را مدل‌سازی نماید و روابط دیگر محققان نتوانستند کار مدل‌سازی را با دقت انجام دهند. بنابراین در این پژوهش، پروفیل جریان حل تحلیلی، با مدل آزمایشگاهی Sedghi-Asl (2010) و مدل تحلیلی Jager (1956) مقایسه شده است و سپس، نقاط ضعف و قوت مدل تحلیلی این پژوهش و سایر محققان مشخص شده است.

شیب ۴ درصد و مصالح گردگوشه

در این پژوهش، مقایسه گرافیکی پروفیل سطح آب در مصالح گردگوشه برای یکی از شرایط مرزی نشان داده شده است. شکل (۵) مقایسه پروفیل حل تحلیلی این پژوهش را با مدل آزمایشگاهی Sedghi-Asl (2010) و مدل تحلیلی Jager (1956) را نشان می‌دهد. همانگونه که مشخص است، حل تحلیلی این پژوهش نسبت به حل تحلیلی Jager (1956) به لحاظ شماتیک به مدل آزمایشگاهی نزدیک‌تر بوده و با در نظر گرفتن شیب ۴ درصد، تاثیر آن بر شرط مرزی بالادست کاملاً مشهود و واضح است. از طرف دیگر، هر دو حل تحلیلی کم برآوردی پروفیل جریان را نشان داده‌اند، ولی حل تحلیلی Jager (1956) به مراتب دارای اختلاف بیشتری است. خصوصاً برای نیمه پایینی فلوام که خطا رفته‌رفته زیاده‌تر شده ولی در انتها، همه پروفیل‌ها هم‌دیگر را قطع نموده‌اند. در واقع، حل‌های تحلیلی در ابتدا و انتها شرایط مرزی را به‌خوبی تخمین زده‌اند که در شکل‌های (۵) و (۶) این موضوع به طور دقیق به تصویر کشیده شده است. نقطه قوت روش تحلیلی مقاله حاضر نسبت به روش Jager (1956) این است که تنها از شرط مرزی پایین‌دست استفاده می‌کند در حالی که روش Jager (1956) از هر دو مرز بالادست و پایین‌دست در محاسبات عمق آب استفاده می‌نماید.



شکل ۵. مقایسه عمق آب در مدل تحلیلی با آزمایشگاهی برای شیب ۴ درصد گردگوشه



شکل ۶. ترسیم گرافیکی خطای نسبی پروفیل جریان نسبت به طول مسیر برای شیب ۴ درصد گردگوشه

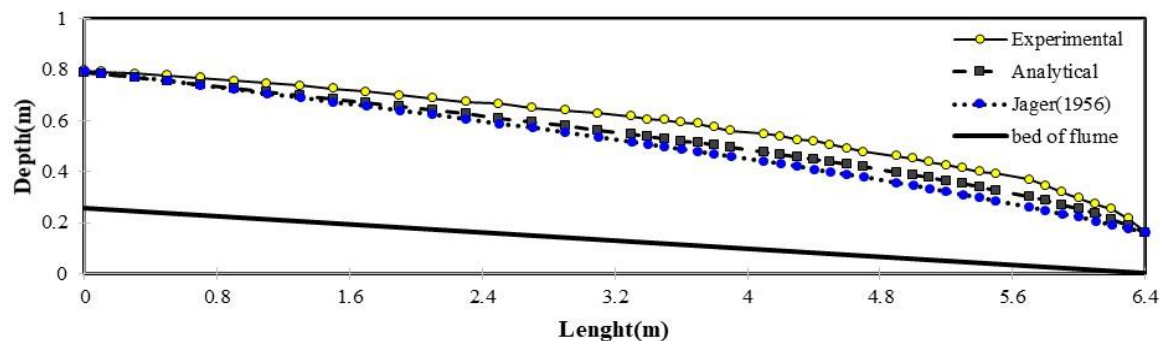
جدول (۱) مقدار خطای NOF برای هر سه حالت شرایط مرزی را نشان داده است. نکته قابل توجه در حل تحلیلی مصالح گردگوشه با تخلخل ۰/۳۹ این است که هر چقدر اختلاف تراز آب بالادست و پایین دست کمتر شود میزان خطای NOF نیز کمتر بدست آمده است ولی این موضوع در روش تحلیلی Jager (1956) اتفاق نیفتاده است و این نشان بر عدم دقت این معادله می باشد. از طرف دیگر درصد خطا در حل تحلیلی پژوهش حاضر نسبت به حل تحلیلی Jager (1956) کمتر شده و نتایج بهتری ارائه نموده است.

جدول ۱. میزان خطای NOF برای مدل تحلیلی نسبت به مدل آزمایشگاهی

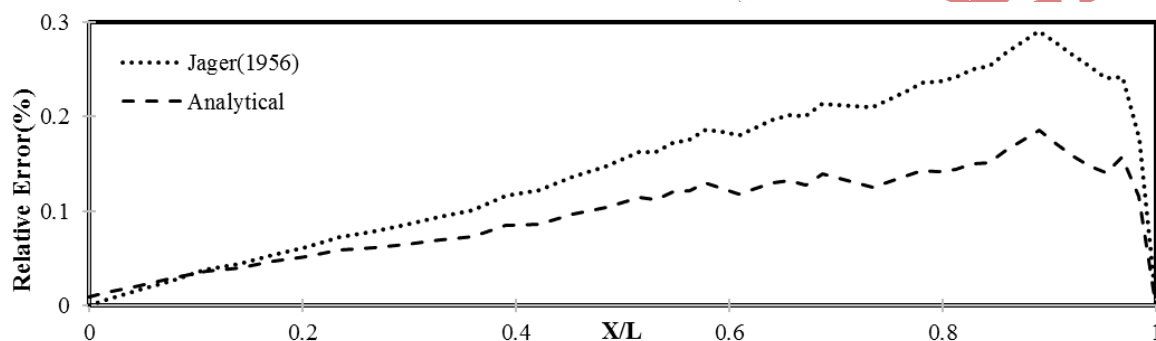
تراز آب بالادست (متر)	تراز آب پایین دست (متر)	تخلخل	هدایت هیدرولیکی (متر بر ثانیه)	دبی جریان عبوری (لیتر بر ثانیه)	درصد خطای حل تحلیلی پژوهش حاضر (%)	درصد خطای حل جیگر (%)
۰/۵۵	۰/۱۷	۰/۳۹	۰/۳۳	۲۵	۱۲/۷۵	۱۳/۱۷
۰/۴۵	۰/۱۳	۰/۳۹	۰/۳۳	۲۰	۸/۹	۱۴/۲۷
۰/۳۳۵	۰/۱۱	۰/۳۹	۰/۳۳	۱۴/۵	۵/۷۳	۱۱/۷

شیب ۴ درصد و مصالح تیز گوشه

در این مصالح مانند مصالح گردگوشه به بررسی سه حالت شرایط مرزی پرداخته شد. در مصالح تیز گوشه با توجه به اینکه تخلخل مصالح بیشتر شده و مقدار آن ۰/۴۳ می باشد، مقادیر خطای مدل تحلیلی کمتر شده است. شکل (۷) تصویری از مقایسه مدل تحلیلی رو نسبت به مدل آزمایشگاهی نشان داده است در این نوع مصالح، فرم کلی پروفیل مانند حالت بالا کم برآوردی را نشان داده است ولی آنچه متفاوت می باشد مقدار خطا بوده که در حالت تیز گوشه نسبت به حالت گردگوشه کمتر حاصل شده است و در شکل (۸) وضعیت خطا برای یک حالت شرایط مرزی در طول فلووم را نشان داده است.



شکل ۷. مقایسه عمق آب در مدل تحلیلی با آزمایشگاهی برای شیب ۴ درصد تیزگوشه



شکل ۸. ترسیم گرافیکی خطای نسبی پروفیل جریان نسبت به طول مسیر برای شیب ۴ درصد تیزگوشه

جدول (۲) مقدار خطای (NOF) را برای سه حالت شرایط مرزی ارائه داده است. همانطور که مشخص است، مجدداً میزان خطا در حل تحلیلی نسبت به حل Jager (1956) کمتر برآورد شده است و این نشان بر دقت حل ارائه شده دارد.

جدول ۲. میزان خطای NOF برای مدل تحلیلی نسبت به مدل آزمایشگاهی

درصد خطای حل تحلیلی پژوهش حاضر (%)	دبی جریان عبوری (لیتر بر ثانیه)	هدایت هیدرولیکی (متر بر ثانیه)	تخلخل	تراز آب پایین دست (متر)	تراز آب بالادست (متر)	درصد خطای حل جایگزین (%)
۱۰/۰۹	۲۸	۰/۴۰	۰/۴۳	۰/۱۶	۰/۵۴	۱۵/۳۳
۶/۵۴	۲۳/۵	۰/۴۰	۰/۴۳	۰/۱۴	۰/۴۶۵	۱۴/۷۶
۵/۶۰	۲۱	۰/۴۰	۰/۴۳	۰/۱۳	۰/۴۲۵	۱۴/۷۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

یافته‌های حاصل از این پژوهش نشان داد حل تحلیلی ارائه شده بر اساس فرضیات جریان متلاطم توسعه یافته درون مصالح درشت‌دانه در حالت شیب‌های ملایم نتایج خوبی ارائه می‌نماید. همانطور که از یافته‌های تحقیق مشخص گردید نتایج حل تحلیلی نسبت به حل Jager (1956) به مراتب دقیق‌تر می‌باشد. نکته قابل توجه در بررسی پروفیل جریان درون مصالح این است با افزایش تخلخل و سپس هدایت هیدرولیکی، مقدار خطای حل تحلیلی کمتر شده و در مقابل خطای حل Jager (1956) افزایش یافته است که این موضوع دلیل محکمی برای پذیرش این حل می‌تواند باشد زیرا که اساس فرض این حل تحلیلی، برای جریان‌ات با نفوذپذیری بالا یا به اصطلاح سرعت زیاد (جریان‌ات غیرداری) مطرح شده است.

یکی از ویژگی‌های معادله ارائه شده، کاربرد این معادله در شرایط بستر با شیب ملایم خواهد بود این در حالی است که معادله برای حالت بدون شیب بستر بیان شده است و قطعا در این نوع جریان‌ات به مراتب دقت بالاتری خواهد داشت و دلیل اصلی خطای مدل تحلیلی این پژوهش با مدل آزمایشگاهی همین موضوع خواهد بود. زیرا اثر شیب بستر باعث اثر وزن جریان در راستای شیب شده و این موضوع باعث بالا رفتن سرعت جریان آب خواهد شد. علاوه بر این وقتی نفوذپذیری مصالح بیشتر شود سرعت جریان بیشتر شده و با توجه به اینکه در پایین دست جریان، زهکشی آب اتفاق می‌افتد، خطای پروفیل خط فریاتیک در انتهای مدل تحلیلی نسبت به مدل آزمایشگاهی بیشتر شده است. اما با همه این تفاسیر، میانگین خطای پروفیل خط فریاتیک در مصالح تیز گوشه (نفوذپذیری بیشتر) نسبت به مصالح گرد گوشه (نفوذپذیری کمتر) کمتر شده است و این به معنای اثر فرض کاملا درست غیرداری در معادله ارائه شده است.

از دیگر ویژگی و برتری معادله ارائه شده در این پژوهش نسبت به معادله Jager (1956) این است که با داشتن شرط مرزی پایین دست می‌توان پروفیل خط فریاتیک را برآورد کرد، این در حالی است که روش حل Jager (1956) بر اساس هر دو شرایط مرزی بالادست و پایین دست می‌باشد و در حالتی که یکی از شرایط مرزی جریان در اختیار نباشد، قادر به ترسیم پروفیل نخواهد بود و این از نقاط ضعف معادله Jager (1956) است. به دلیل اینکه جریان زیر بحرانی از پایین دست کنترل می‌شود و در محیط‌های متخلخل، عدد فرود کمتر از یک بوده، بنابراین جریان همواره زیر بحرانی است، از این رو باید شرط مرزی پایین دست به عنوان نقطه شروع محاسبات انتخاب گردد و مرز بالادست آزاد گذاشته شود تا قابلیت و کارایی روش حل مورد ارزیابی و بررسی قرار گیرد. سرانجام می‌توان گفت در مصالح با نفوذپذیری زیاد یا به اصطلاح محیط‌های غیرداری، روابط ارائه شده توسط محققانی چون (Chapman (1957, Bear (1972, Castro- Orgaz (2011 و Di nucci (2015 نمی‌توانند پروفیل جریان را به خوبی برآورد نمایند. در حالی که حل ارائه شده در این پژوهش دقت خوبی داشته و از این حل می‌توان برای تخمین پروفیل جریان درون محیط‌های درشت‌دانه استفاده کرد. با وجود دقت مناسب حل تحلیلی ارائه شده، دامنه کاربرد آن به فرضیات حاکم بر مدل محدود است. در این پژوهش، محیط متخلخل همگن و همروند فرض شده و اثر ناهمگنی، ناهمسانگردی و لایه‌بندی محیط در نظر گرفته نشده است و همچنین، مدل برای جریان اشباع ماندگار دوبعدی توسعه یافته و تغییرات زمانی و نوسانات سطح آب لحاظ نشده‌اند، لذا پیشنهاد می‌گردد که در پژوهش‌های آتی اثرات ناهمگنی و ناهمروندی به اضافه غیرماندگار بودن جریان مورد توجه قرار گیرد.

REFERENCE

- Arbhabharama, A. & Dinoy, A. A. (1973). Friction factor and Reynolds number in porous media flow. *Journal of the Hydraulics Division*, 99(6), 901-911.
- Bari, R., & Hansen, D. (2002). Application of gradually-varied flow algorithms to simulate buried streams. *Journal of Hydraulic Research*, 40(6), 673-683.
- Bear, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media (Part 1)*. New York.
- Castro- Orgaz, O. (2011). Steady free- Surface flow in porous media: generalized Dupuit-Fawer equation. *Journal of Hydraulic Research*, 49(1), 55-63.
- Castro-Orgaz, O., Cantero-Chinchilla, F. N., Giraldez, J. V., & Hager, W. H. (2023). Sigma mapping for drainage problems with a time-dependent water table. *Advances in Water Resources*, 175, 104409.
- Chapman, T. G. (1957). Two dimensional ground water flow through a bank with vertical faces. *Geotechnique*, 7(1), 35-40.
- Childs, E. C. (1971). Drainage of Groundwater Resting on a Sloping Bed. *Water Resources Research*, 7(5), 1256-1263.
- Di Nucci, C. (2015). A free boundary problem for fluid flow through porous media. *arXiv preprint arXiv:1507.05547*.
- Jager, C. (1956). *Engineering Fluid Mechanics*. Blackie and Son. Edinburgh.
- Li, B. Garga, V. K. & Davies, M. H. (1998). Relationships for non-Darcy flow in rockfill. *Journal of Hydraulic Engineering*, 124(2), 206-212.
- Naderi, S. (2017). *Experimental investigation of drainage flow under soil variability and surface recharge flow*. M. SC. Thesis, Faculty of Engineering, Department of Civil Engineering, Yasouj university, Yasouj. (In Farsi)
- Sedghi-Asl, M. (2010). *Investigation of Dupuit Approximate Limits for gradually varied flow in coarse grained porous media*. Ph.D. University of Tehran, Tehran. (In Farsi)
- Sedghi-Asl, M. Farhoudi, J. Rahimi, & H. Hartmann, S. (2014a). An Analytical Solution for 1-D Non-Darcy Flow Through Slanting Coarse Deposits. *Transport in Porous Media*, 104(3), 565-579.
- Sedghi-Asl, M. Farhoudi, J. Rahimi, H. Hoorfar, A. (2014b). One-Dimensional Fully Developed Turbulent Flow through Coarse Porous Medium. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19(7), 1491-1496.
- Wilkins, J. K. (1956). Flow of water through rockfill and its application to the design of dams. *New Zealand Engineering*, 10(11), 382-387.
- Wright, D. E. (1968). Nonlinear flow through porous media. *Journal of the Hydraulics Division*, 94(4), 851-872.
- Zeng, Z. & Grigg, R. (2006). A Criterion for Non-Darcy Flow in Porous Media. *Transport in Porous Media*, 63(1), 57-69.
- Zerihun, Y. T. (2025). Investigating the Problems of Unconfined Non-Darcy Flows through Embankment Dams using a Depth-Averaged Model. *Slovak Journal of Civil Engineering*, 33(2), 36-45.