

## Quasi-two dimensional modeling of flow hydraulics in deposited pipes

### Abstract

Circular closed conduits with free surface have many applications in nature. Two-dimensional flow hydraulic simulation studies in these channels are limited and generally one-dimensional relations and equations are used for modeling and designing these channels. In this study, a quasi-two-dimensional mathematical model (Shiono and Knight, SKM) based on the Navier-Stokes equations is used to calculate the transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress in a deposited pipe (or pipe with a flat bed). To solve the SKM model, three key coefficients of this model must be determined which play a decisive role in simulating the transverse velocity distribution and boundary shear stress. In this study, the Rameshwaran and Shiono (2007) equation was used to calculate the friction coefficient ( $f$ ) and a numerical optimization process based on laboratory data was used to calibrate the two coefficients of eddy viscosity ( $\lambda$ ) and the secondary flow ( $\beta$ ). The results indicate the different capabilities of the Shiono and Knight models in simulating the transverse velocity and shear stress distribution. The results indicate the different capabilities of the Shiono and Knight model in simulating the lateral distribution of velocity and shear stress. Although this model estimates the velocity distribution with reasonable accuracy (with an average and maximum error of 6 and 7.1 percent, respectively), the boundary shear stress distribution (with an average and maximum error of 18.5 and 22 percent, respectively) is far from acceptable values.

**Keywords:** Circular sections, Free water surface, lateral distribution of flow velocity, lateral distribution of boundary shear stress, Quasi two dimensional model

## EXTENDED ABSTRACT

### Introduction

In addition to rivers and canals, which always have a free water surface, in some cases, closed conduits such as partially-filled pipes and culverts also are gravity-fed. The flow in these sections is very different from the hydraulics of flow in closed or under pressure pipes. One of the distinguishing aspects of these two types of flow is the higher probability of sedimentation occurring in the free flow conditions. Sedimentation in these sections may occur naturally or artificially. In sewers, this sedimentation generally occurs in non-self-cleaning pipes due to a reduction in flow velocity (formation of a backwater profile, M1, caused by downstream obstacles) or the entry of sediment particles larger than the particle mobility threshold at the time of pipe design. In road culverts, a sediment bed may be used at the bottom of the culvert to create a suitable environment and substrate for fish to live and passage. Over time, the sediment layer deposited at the bottom of the section becomes stable and is considered a new geometry for the culvert. So far, the hydraulic design and analysis of flow in these channels has been mainly one-dimensional, using empirical and semi-analytical relations or equations, and two or three-dimensional simulations in this field are limited. In this study, a quasi-two-dimensional model was used to analyze the flow in partially-filled deposited pipes, which has a lower run time than two- and three-dimensional models and greater accuracy than one-dimensional models.

### Material and Methods

Nowadays, there are many mathematical models that, while having the accuracy of two-dimensional and three-dimensional models, are similar in simplicity to one-dimensional models. These models are called depth-averaged models or lateral distribution model (LDM) and calculate hydraulic parameters (such as flow velocity, discharge, bed shear stress, etc.) across the channel. Among the important and well-known models in this field are Wark et al (1990), Shiono and Knight (1991), and Ervine et al. (2000). Due to the widespread applications of the Shiono and Knight model (SKM) by researchers, this model was used in this study. SKM is a quasi-two-dimensional mathematical model based on the Navier-Stokes equations which is generally used to calculate the transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress in open channels. In this study, this model is used for flow analysis of a partially-filled pipe with flat bed. For calibration of friction coefficient ( $f$ ), the Rameshwaran and Shiono (2007) equation was used. Also for calibration of two coefficients of eddy viscosity ( $\lambda$ ) and the secondary flow ( $\beta$ ), a numerical optimization process was used. The optimization of these two coefficients is based on the simultaneous solution of transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress with a minimum error in a deposited pipe with three different flow depths. Afterward, this process is validated based on another flow depth. SKM has been numerically solved using finite difference methods. All steps of solving this model, as well as optimization of eddy viscosity and secondary flow coefficients, have been carried out in Excel.

### Results and Discussion

By comparing the SKM results with Sterling's experimental data, it was found that this model behaves differently in estimating the transverse distribution of flow velocity and boundary shear stress in deposited pipes. The results of the transverse velocity distributions at all flow depths have very good accuracy, with a mean error of about 6 percent and a maximum of nearly 7.1 percent. The average flow velocity obtained from the Manning equation is higher than both the calculated and observed velocities. The highest error of the Manning formula (about 37%) occurred at the lowest flow depth (40.7 mm). After calculating the transverse velocity distribution, the flow discharge is obtained by lateral integration of this distribution. The stage-discharge curves obtained from the SKM are in much better agreement with the experimental data compared to the Manning formula results.

However, the lateral distribution of shear stresses is not very satisfactory. The mean and maximum of shear stress prediction errors are 18.5 and 22 percent, respectively. Although this behavior is not unusual and has been reported in studies by various researchers, it could also have another reason. One of the reasons for this issue is the complexity of the geometry of the partially filled pipes with flat bed.

## Conclusion

In this study, a simple and practical quasi-two-dimensional model based on flow hydrodynamics was used to simulate the lateral distribution of flow velocity and bed shear stress, as well as to extract the stage-discharge curve in partially-filled deposited pipes. The results showed that:

1. The results obtained have appropriate accuracy and the use of the SKM proposed in this study can reduce the error in flow rate calculations by up to 30% compared to the widely used Manning formula.
2. For the lateral distribution of local bed shear stress, several simulations were performed using the SKM at different flow depths. The results of this simulations showed that the estimation of bed shear stress values in partially-filled deposited pipes is less accurate than the flow velocity values. The error of the traditional formula ( $\tau = \gamma R S_0$ ), which is widely used in estimating shear stress in rivers and open channels, is more than 72%. Therefore, the results of the SKM, as initial and preliminary solutions, well meet the needs of researchers in the design and management of hydraulic structures.
3. The quasi-two-dimensional Shiono and Knight model, using the equations considered in this study, has high efficiency and accuracy in estimating the distribution of flow velocity and shear stress across partially filled and deposited pipes and can be a very good alternative to the conventional one-dimensional models used in this field.

## Funding

This research did not receive any specific grant from funding agencies in the public, commercial, or not for-profit sectors.

## Authorship contribution

All authors contributed equally to the conceptualization of the article and writing of the original and subsequent drafts.

## Declaration of Generative AI and AI-assisted technologies in the writing process

The authors didn't use any generative AI and AI-assisted technologies in the writing process of this manuscript.

## Data availability statement

The data that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request.

## Acknowledgements

The authors would like to thank all supports of Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources in the present study.

## Ethical considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, and plagiarism, and any form of misconduct.

## Conflict of Interest

The author declares no conflict of interest.

## مدل سازی شبه دوبعدی هیدرولیک جریان در لوله های رسوبگذار

### چکیده

مجاری دایره ای با سطح آزاد دارای کاربردهای مهمی در طبیعت هستند. مطالعات شبیه سازی دوبعدی هیدرولیک جریان در این مجاری محدود بوده و عموماً از روابط و معادلات یک بعدی برای مدل سازی و طراحی این مجاری استفاده می شود. در این مطالعه، از یک مدل ریاضی شبه دوبعدی (شیونو و نایت) مبتنی بر معادلات ناویر-استوکس برای محاسبه توزیع عرضی سرعت جریان و تنش برشی مرزی در یک لوله رسوبگذار استفاده شده است. برای اجرا و ارزیابی دقت این مدل، از داده های آزمایشگاهی سترلینگ در یک لوله با بستر رسوبی استفاده شد. برای حل مدل شیونو و نایت باید ۳ ضریب کلیدی این مدل که نقشی تعیین کننده در شبیه سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی مرزی ایفا می کنند، تعیین شوند. در این مطالعه، از رابطه Rameshwaran and Shiono (2007) برای محاسبه ضریب اصطکاک و از یک فرآیند بهینه سازی عددی مبتنی بر داده های آزمایشگاهی برای واسنجی دو ضریب لزجت گردابه ای و ضریب جریان های ثانویه استفاده شد. بهینه سازی این دو ضریب بر اساس کمینه سازی همزمان خطای محاسبه توزیع سرعت جریان و تنش برشی مرزی در عرض لوله انجام شد. نتایج بیانگر قابلیت متفاوت مدل شیونو و نایت در شبیه سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی می باشد. این مدل اگرچه توزیع سرعت ها را با دقت مناسبی (با میانگین و حداکثر خطای ۶ و ۷/۱ درصد) برآورد می کند اما توزیع تنش برشی مرزی (با میانگین و حداکثر خطای ۸/۵ و ۲۲ درصد) با مقادیر قابل قبول فاصله دارد. یکی از دلایل این موضوع، پیچیدگی هندسه لوله های رسوبگذار نیمه پر است.

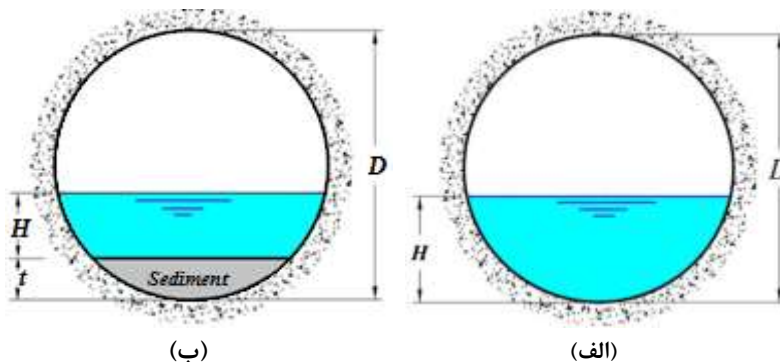
**کلمات کلیدی:** توزیع عرضی تنش برشی، توزیع عرضی سرعت، جریان با سطح آزاد، لوله های رسوبگذار، مدل شبه دوبعدی

### مقدمه

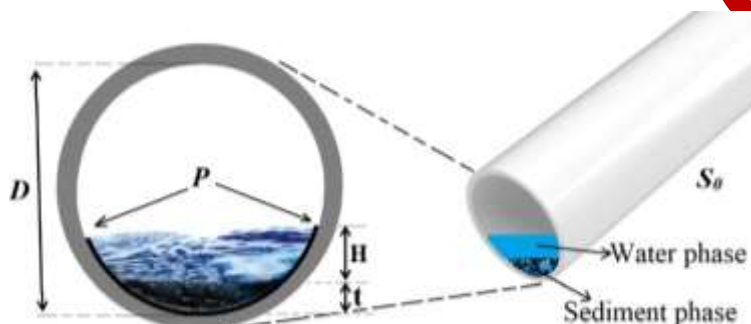
مجاری دایره ای انتقال آب معمولاً به دو صورت لوله های آب و فاضلاب و کالورت های زیرگذر در طبیعت طراحی و اجرا می شوند. جریان در این مجاری به صورت سطح آزاد یا ثقلی بوده و تفاوت بسیار زیادی با هیدرولیک جریان در لوله های تحت فشار دارد (Kehler, 2009; Yoon et al., 2012). یکی از جنبه های تمایز این دو نوع جریان، وقوع رسوبگذاری در حالت جریان آزاد است (Azamathula et al., 2011). رسوبگذاری در این مجاری ممکن است به صورت طبیعی یا مصنوعی اتفاق بیفتد. در مجاری فاضلاب، این رسوبگذاری عموماً در لوله های غیرخودشستشو<sup>۱</sup> و به دلیل کاهش سرعت جریان (تشکیل پروفیل برگشتی، M1، ناشی از موانع پایین دست) و یا ورود ذرات رسوب و مواد اضافی بزرگتر از آستانه حرکت ذرات در زمان طراحی لوله ایجاد می شود. در کالورت ها یا آبگذرهای لوله ای جاده ممکن است برای ایجاد محیط و بستر مناسب برای زندگی و پرورش ماهی ها، از یک بستر رسوبی در کف آبگذر استفاده شود (Mohebbi, 2014). به مرور زمان، لایه رسوبی ته نشین شده در کف مقطع، ته نشین شده و به عنوان یک هندسه جدید برای کالورت موردنظر در نظر گرفته می شود. شکل ۱ تفاوت دو لوله تمیز و رسوبگذار (با بستر تخت) را نشان می دهد. همچنین در شکل ۲، مقطع طولی و عرضی یک لوله رسوبگذار نیمه پر به صورت شماتیک و در شکل ۳ نیز کاربرد این مجاری در عمل و برای طراحی کالورت های عبور ماهی همراه با جریان آب ارائه شده است.

<sup>1</sup>. Non-cleansing pipes

<sup>2</sup>. Clean and Deposited (flat bed) Pipe



شکل ۱- جریان در لوله‌های نیمه‌پر در حالت (الف) لوله تمیز و (ب) لوله رسوبگذار



شکل ۲- شماتیک مقطع عرضی و طولی لوله‌های نیمه‌پر در حالت رسوبگذار و معرفی متغیرهای موثر در مسئله



(ب)

(الف)

شکل ۳- نمونه‌های کاربرد عملی مجاری دایره‌ای رسوبگذار در طبیعت، (الف) آماده‌سازی کالورت، (ب) بهره‌برداری از کالورت

هیدرولیک جریان در مجاری روباز دایره‌ای بر خلاف لوله‌های تحت فشار از پیچیدگی بیشتری برخوردار است (Koutsospyrou et al., 2025). یکی از دلایل این پیچیدگی، اثر مقاومت جریان (ضریب زبری) بر محاسبات سرعت و دبی جریان عبوری است (Sterling and Knight, 2000; Zeghadnia et al., 2019). نتایج مطالعات نشان داده است که حتی در شرایط یکنواخت و با جنس لوله ثابت، نتایج استفاده از فرمول مانینگ در این مجاری قابل قبول نیست. تاکنون تحقیقات متعددی در خصوص برآورد ضریب زبری مانینگ در لوله‌های نیمه‌پر انجام شده است. در تمامی این روابط، ضریب زبری اصلاحی تابع عمق جریان و قطر لوله است (Funamizu et al., 1991; Akgiray, 2004). مثلاً کمپ رابطه‌ای را ارائه نمود که در آن، ضریب زبری مانینگ باید تا ۳۰ درصد بیشتر از ضریب مانینگ مرتبط با جنس لوله باشد (Camp, 1946). در لوله‌های رسوبگذار این پیچیدگی بیشتر است، به این دلیل که ضریب زبری در

کف لوله که معمولاً رسوبات ته‌نشین شده‌اند، با زیری جداره‌های لوله متفاوت بوده و در عمق‌های مختلف جریان نیز تاثیر متفاوتی دارد.

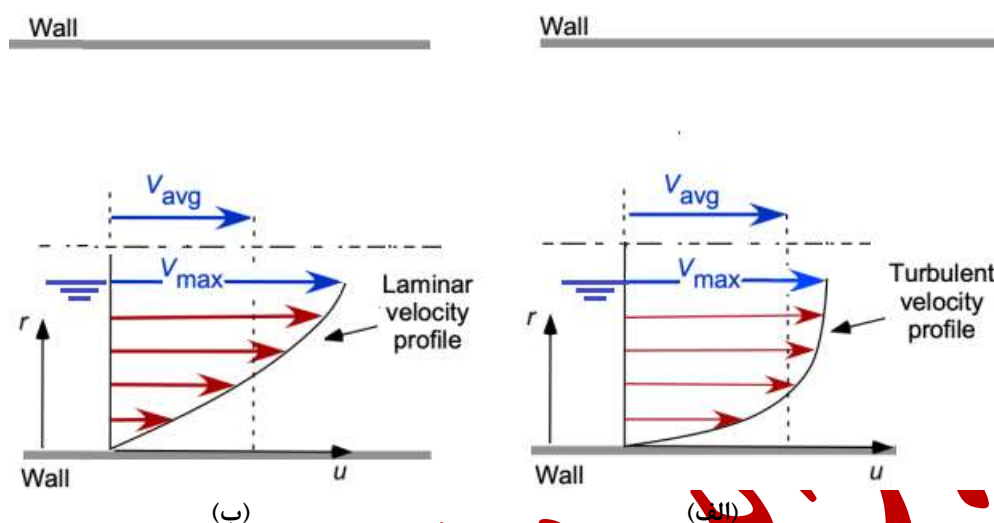
بدیهی است برای حصول نتایج دقیق‌تر مشخصات هیدرولیک جریان (سرعت، دبی و تنش برشی) و نیز ارائه جزئیات بیشتری از پارامترهای هیدرولیکی مثل توزیع عرضی سرعت و تنش برشی بستر، استفاده از مدل‌های دو و سه‌بعدی مبتنی بر دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) ضروری است (ظهیری و شریفی، ۱۴۰۴). آگاهی از توزیع سرعت جریان در عرض لوله می‌تواند تصمیم‌گیری در مورد احتمال وقوع رسوبگذاری در لوله و نیز تردد راحت و مطمئن ماهی‌ها از درون مجاری دایره‌ای را تسهیل نماید (Mohebbi, 2014). مطالعات نشان داده است که ماهی برای تردد خود، به سرعت‌هایی در محدوده‌های خاص نیاز دارد (Abbs et al., 2007; Schall et al., 2012; Gue et al., 2015; Monison et al., 2019). توزیع عرضی تنش برشی نیز می‌تواند در مدیریت رسوبگذاری در مجاری دایره‌ای موثر باشد (Regueiro-Picallo et al., 2016). این در حالی است که کاربرد مدل‌های CFD در شبیه‌سازی جریان آشفته با سطح آزاد در مجاری دایره‌ای به‌ویژه در عمق‌های کم جریان و نیز در کناره‌های مقطع ساده نبوده و انتخاب مدل مناسب در این خصوص چالش برانگیز است (Alihosseini and Thamsen, 2019; Li et al., 2018). به دلایل فوق و نیز سایر محدودیت‌های مدل‌های دوبعدی مثل نیاز به حافظه محاسباتی بسیار زیاد، لزوم واسنجی دقیق و مبتنی بر داده‌های آزمایشگاهی کافی و نیز چالش‌های فراوان شبکه‌بندی (مش‌بندی) میدان حل، یافتن راهکارهایی ساده‌تر برای حل الگوی جریان در مجاری دایره‌ای با سطح آزاد دارای انرژی و کارایی علمی و کاربردی زیادی است. در این زمینه، محققین مختلف روش‌های متعددی را ارائه نموده‌اند که روش آنروپی و ... قابل ذکر است (Jiang et al., 2016). همه این روش‌ها ماهیتی یک‌بعدی دارند و نمی‌توانند جزئیات هیدرولیکی جریان در مجاری دایره‌ای را ارائه کنند. به همین دلیل، در این پژوهش از راهکار موثر و بهینه‌ای استفاده شده است که ضمن دارا بودن سادگی مدل‌های یک‌بعدی، از قابلیت در حد مدل‌های دوبعدی برخوردار است. در این راهکار برای تعیین مشخصات هیدرولیک جریان در لوله‌ها، از یک مدل ریاضی شبه‌دوبعدی مبتنی بر توزیع عرضی سرعت و تنش برشی استفاده می‌شود. پایه و اساس مدل‌های ریاضی شبه‌دوبعدی، معادلات حرکتی ناویه-استوکس است که برای سادگی و حل سریعتر، در عمق جریان انتگرال-گیری شده و به مدل‌های متوسط در عمق نیز معروف هستند. دلیل انتگرال‌گیری در عمق از معادلات ناویه-استوکس در شکل ۴ نشان داده شده است. در این شکل، توزیع قائم سرعت جریان در یک لوله نیمه‌پر برای دو حالت جریان آرام و آشفته ارائه شده است. مشاهده می‌شود که در حالت جریان آشفته، توزیع قائم سرعت تقریباً دارای یکنواختی بسیار بیشتری در مقایسه با حالت جریان آرام دارد، به‌طوری‌که میانگین عمقی سرعت جریان تفاوت چندانی با مقادیر سرعت‌ها در نقاط ارتفاعی مختلف ندارد. به همین دلیل است که معمولاً در مسائل کاربردی، ضریب تصحیح انرژی جنبشی جریان ( $\alpha$ ) در شرایط جریان آشفته معادل واحد در نظر گرفته می‌شود. اما نکته مهم‌تر این است که در این حالت، کاربرد مدل‌های ریاضی شبه‌دوبعدی که مبتنی بر محاسبه سرعت میانگین در عمق جریان هستند، می‌تواند یک ایده منطقی و موثر باشد. در این صورت، محاسبه سریع و دقیق مقادیر سرعت‌های نقطه‌ای در عرض جریان و نیز پارامترهای مهم هیدرولیکی مانند دبی جریان، تنش برشی بستر و ... امکانپذیر خواهد بود. مدت زمان مورد نیاز برای اجرای مدل‌های شبه‌دوبعدی تقریباً معادل مدل‌های یک‌بعدی و بسیار کمتر از مدل‌های ریاضی دو و سه‌بعدی است. علاوه بر این، فرم معادلات حاکم در مدل‌های شبه‌دوبعدی و روش عددی حل آنها بسیار ساده‌تر از مدل‌های دو و سه‌بعدی است. در این زمینه، یک پژوهش توسط ظهیری و شریفی (۱۴۰۴) انجام شده که در آن، هیدرولیک جریان در یک لوله نیمه‌پر آزمایشگاهی به کمک مدل شبه‌دوبعدی شیونو و نایت شبیه‌سازی شده و منحنی دبی-اشل آن استخراج شده است. دقت نتایج دبی جریان در این روش بسیار خوب ارزیابی شده است.

1. Computational Fluid Dynamics (CFD)

2. Lateral Distribution Model (LDM)

3. Depth-Averaged Model

با توجه به نتایج مناسب مطالعه ظهیری و شریفی (۱۴۰۴)، در پژوهش حاضر سعی شده است که از همین ایده برای شبیه‌سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی بستر در لوله‌های رسوبگذار استفاده شده و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شود.



شکل ۴- تفاوت پروفیل‌های قائم سرعت در لوله‌های نیمه پر در دو حالت (الف) جریان آشفته و (ب) جریان آرام

## روش‌شناسی پژوهش

### مدل ریاضی شیونو و نایت

بر خلاف کانال‌ها و آبراهه‌های روباز که دارای مدل‌های ریاضی متعددی با فرضیاتی متفاوت است، مجاری روباز دایره‌ای از این نظر دارای محدودیت هستند. در این مجاری فقط مدل‌های یک‌بعدی و نیز دینامیک سیالات محاسباتی کاربرد داشته‌اند. با توجه به ارائه و پیشنهاد مدل ریاضی شبه‌دو بعدی شیونو و نایت در لوله‌های نیمه پر (ظهیری و شریفی، ۱۴۰۴)، در این مطالعه از همین مدل برای شبیه‌سازی توزیع عرضی سرعت و تنش برشی مرزی در لوله‌های رسوبگذار استفاده شده است.

در مدل ریاضی Shiono and Knight (1999) با فرض جریان ماندگار و یکنواخت و نیز صرف نظر کردن از مولفه قائم سرعت جریان، توزیع عرضی سرعت متوسط در عمق جریان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho g H S_0 - \rho \frac{f}{8} U_d^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho \lambda H^2 \left( \frac{f}{8} \right)^{1/2} \frac{\partial U_d^2}{\partial y} \right\} = \beta \rho g H S_0 \quad \text{رابطه ۱}$$

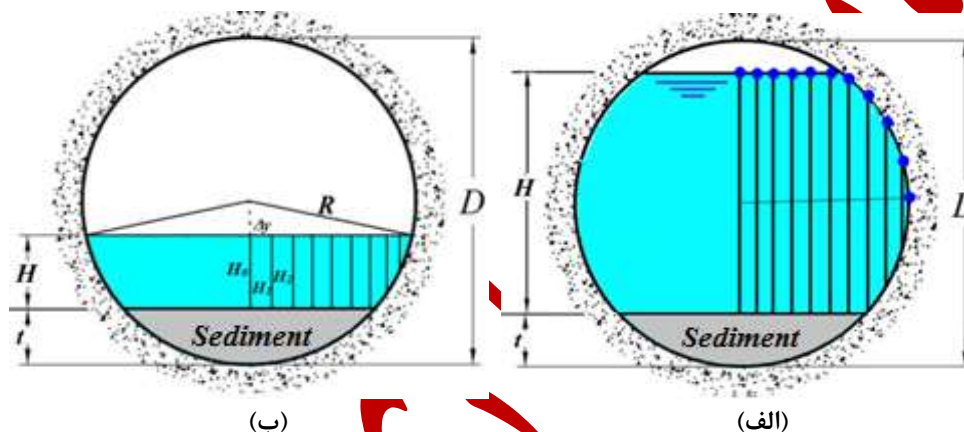
که  $\rho$  جرم حجمی آب،  $g$  شتاب ثقل،  $H$  عمق محلی جریان،  $S_0$  شیب کف،  $f$  ضریب اصطکاک دارسی-وایسباخ،  $U_d$  سرعت متوسط در عمق در عرض مجرا،  $s$  شیب جانبی مجرا (قائم به افقی)،  $\lambda$  ضریب بدون بعد لزجت گردابه‌ای،  $\beta$  ضریب جریان‌های ثانویه و  $\gamma$  موقعیتی از عرض مجرا می‌باشد که سرعت در آن نقطه باید به دست آید (Shiono and Knight, 1991).

### حل مدل شیونو و نایت در لوله‌های رسوبگذار نیمه پر

#### حل توزیع عرضی سرعت جریان

برای حل این مدل و محاسبه توزیع عرضی سرعت و تنش برشی در لوله به ازا هر عمق جریان دلخواه، باید ابتدا عرض سطح آب در لوله به چند زیربازه یا گره محاسباتی به فاصله‌های  $\Delta y$  تقسیم شود. مطالعات قبلی نشان داده‌اند که استفاده از حدود ۵۰ گره می‌تواند دقت مناسبی برای شبیه‌سازی توزیع عرضی سرعت فراهم کند (ظهیری و شریفی، ۱۴۰۴). در این تحقیق، به منظور افزایش دقت

عددی، از ۱۰۰ گره استفاده شده است. گره‌بندی عرض سطح آب در لوله‌ها در دو حالت عمق‌های کمتر و بیشتر از شعاع لوله با هم متفاوت است. در حالت  $H < R$  (شکل a-۵ که  $R$  شعاع لوله است)، تقسیم‌بندی از وسط سطح آب تا لبه آب انجام می‌شود، اما در حالت  $H > R$  (شکل b-۵)، این کار از وسط سطح آب تا انتهای شعاع لوله امتداد می‌یابد. در این صورت، عمق جریان در هر گره محاسباتی باید مطابق شکل b-۵ در نظر گرفته شود. در هر دو حالت به دلیل تقارن جریان، تنها یک نیمه از مقطع لوله در نظر گرفته شده است. گره‌های مشخص شده در سطح آزاد آب و یا جداره لوله، نقطه‌هایی است که سرعت جریان در آنها محاسبه می‌شود. نکته مهم در حالت دوم این است که گره‌های انتهایی دارای سطح آزاد جریان نیستند و ممکن است فرض مدل شیونو و نایت مبنی بر افقی بودن تراز سطح آب را نقض کنند. این حالت بسیار خاصی است که تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته و اثر آن بر نتایج حل توزیع عرضی سرعت و تنش برشی مشخص نشده است.



شکل ۵- تقسیم مقطع عرضی جریان در لوله رسوبی نیمه پر به چندین زیربازه، الف) عمق جریان کوچکتر از شعاع لوله ( $H < R$ ) و ب) عمق جریان بزرگتر از شعاع لوله ( $H > R$ )

برای انجام محاسبات حل عددی معادله ۱ در لوله‌های رسوبی نیمه پر، عمق جریان در هر گره محاسباتی در حالت  $H < R$  از رابطه (۲) محاسبه می‌شود. برای حالت  $H > R$  مطابق شکل ۶-الف، برای محدوده ۱ از رابطه (۲) و برای محدوده ۲ از رابطه (۳) استفاده می‌شود:

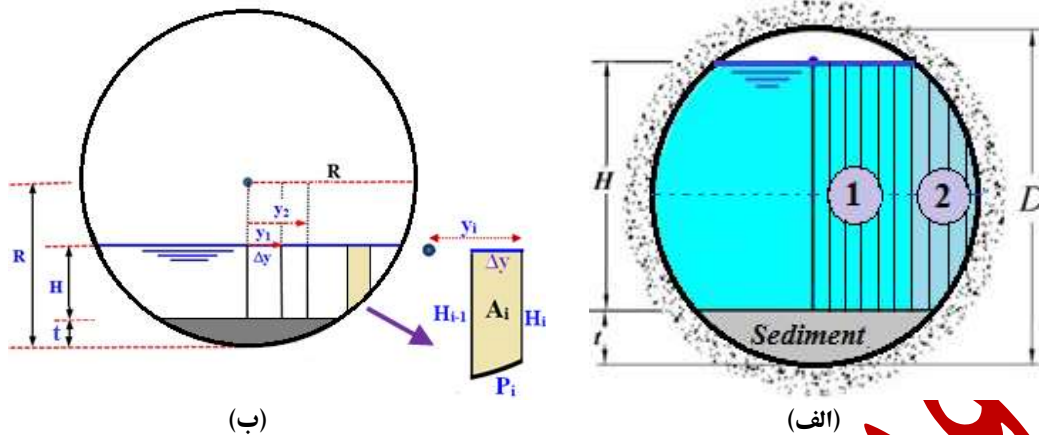
$$H_i = \sqrt{R^2 - y_i^2} - (R - H) \quad \text{رابطه (۲)}$$

$$H_i = 2\sqrt{R^2 - y_i^2} \quad \text{رابطه (۳)}$$

محاسبه مساحت هر زیربازه به روش‌های ریاضی متفاوتی امکان‌پذیر است، اما در این مطالعه و با توجه به کوچک بودن بسیار زیاد زیربازه‌ها، هر یک از این بازه‌ها به صورت مستطیل یا دوزنقه فرض شده و مساحت آنها به دست آمده است (شکل ۶-ب):

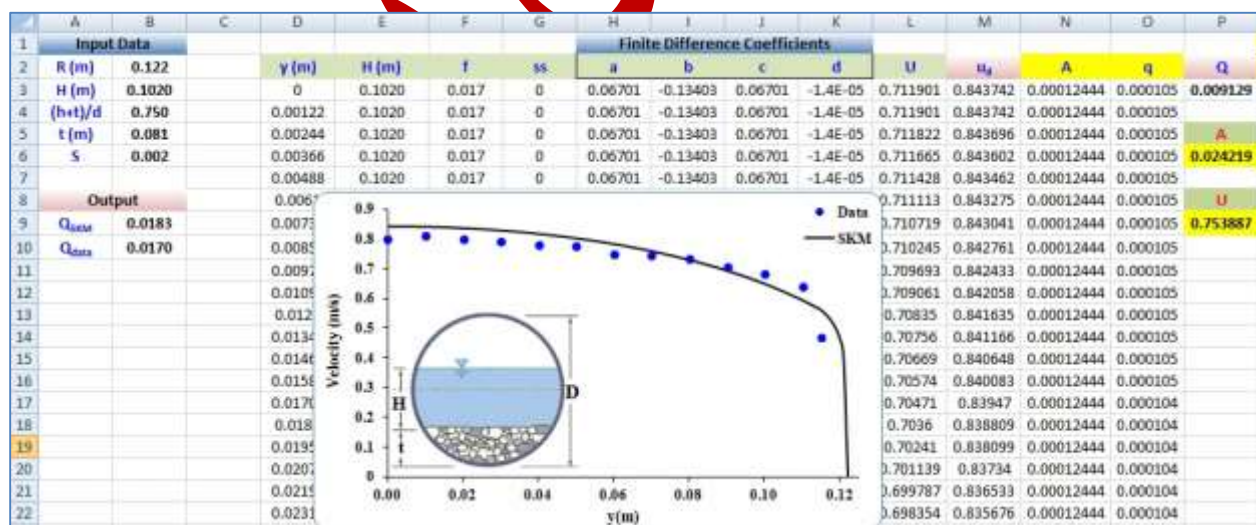
$$A_i = \frac{1}{2} \Delta y_i (H_{i-1} + H_i) \quad \text{رابطه (۴)}$$

که  $\dot{I}$  نماینده هر برش یا زیربازه است.



شکل ۶- نمایش زیربازه‌ها و جزئیات آنها در یک لوله رسوبی نیمه‌پر، (الف) عمق جریان در حالت  $H > R$ ، (ب) مساحت جریان

بعد از محاسبه عمق جریان در هر گره، گسسته‌سازی معادله دیفرانسیلی شیونو و نایت در هر گره محاسباتی به روش تفاضل-های محدود انجام می‌شود. در این مرحله و با توجه به وجود مشتق مرتبه دوم در این معادله، گره‌های اول و آخر قابل استفاده نبوده و باید به ازاء این دو گره، دو شرط مرزی مناسب در نظر گرفت که سیستم حل، بسته شده و تعداد معادلات با تعداد مجهولات برابر شود. در نقطه ابتدایی، فرض مشتق صفر سرعت (یا وقوع سرعت جریان حداکثر در وسط لوله) و در نقطه آخر، فرض سرعت صفر (اصل عدم لغزش) قابل تعریف می‌باشند. با گسسته‌سازی معادله (۱) در تمامی گره‌های واجد شرایط، یک دستگاه معادلات خطی تشکیل می‌شود که حل این دستگاه خطی با روش‌های متعددی قابل انجام است (Omran et al., 2008; Tang and Knight, 2008; Rezaei and Knight, 2009; Devi and Khatua, 2017; Alawadi et al., 2018). در این مطالعه و با توجه به دسترسی همگانی به محیط اکسل، این دستگاه معادله به کمک توابع آماده این نرم‌افزار حل شده است. نمونه‌ای از حل این معادله در محیط اکسل برای یکی از داده‌های آزمایشگاهی این تحقیق در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۷- نمونه‌ای از حل مدل SKM در یک لوله رسوبگذار با عمق جریان ۱۰/۲۰ سانتیمتر (آزمایش ۳)

## حل توزیع عرضی تنش برشی مرزی

علاوه بر سرعت جریان، تنش برشی بستر ( $\tau_b$ ) نیز دارای اهمیت زیادی بوده و می‌تواند در طراحی لوله‌های غیررسوبگذار (خودشستشو) و نیز پیش‌بینی احتمال وقوع رسوبگذاری در لوله مورد استفاده قرار گیرد. برای محاسبه تنش برشی در مجاری روباز از فرمول یک‌بعدی متداول در مباحث هیدرولیک استفاده می‌شود (رابطه ۵)، این در حالی است که روابط متعدد دیگری به این منظور توسعه داده شده است. ساده‌ترین روش در این زمینه، رابطه (۶) می‌باشد که برای هر سرعت نقطه‌ای، یک تنش برشی مجزا را محاسبه می‌کند. از این روش و به کمک توزیع عرضی سرعت به دست آمده از مدل شیونو و نایت، توزیع عرضی تنش برشی محاسبه شده است.

$$\tau_{b-1D} = \gamma R S_0 \quad (\text{رابطه ۵})$$

$$\tau_{b-SKM} = \rho f U_d^2 / 8 \quad (\text{رابطه ۶})$$

که  $\gamma$  وزن مخصوص آب و  $R$  شعاع هیدرولیکی است.

## تعیین مقادیر پارامترهای مدل شیونو و نایت

برای حل مدل شیونو و نایت، علاوه بر هندسه مجرا، شیب طولی، و نیز عمق‌های جریان، شیب جانبی و فاصله عرضی در هر گره محاسباتی، باید ۳ ضریب مهم  $f$ ،  $\lambda$  و  $\beta$  برای مجرای مورد مطالعه مشخص شوند. در این تحقیق برای تخمین ضریب اصطکاک برای هر گره در عرض مجرا از معادله پیشنهادی (Rameshwaran and Shiono (2007) که تصحیح شده معادله کالبروک-وایت است، استفاده شد:

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{3.02\nu}{\sqrt{128gH^3S_0}} + \frac{k_s}{12.3H} \right) \right]^{-2} \quad (\text{رابطه ۷})$$

که  $\nu$  ضریب لزجت سینماتیکی آب و  $k_s$  ارتفاع زبری معادل می‌باشد. ارتفاع زبری معادل در آبراهه‌های طبیعی معمولاً بر اساس قطر میانه ذرات رسوب کف آبراهه تعیین می‌شود، اما در اینجا بر اساس ضریب زبری مانینگ ( $n$ ) و با معادله زیر تعیین شده است (Alawadi et al., 2018):

$$k_s = (8.25\sqrt{gn})^6 \quad (\text{رابطه ۸})$$

برای تخمین ضرایب  $\lambda$  و  $\beta$  در این تحقیق و با توجه به عدم وجود مقادیری استاندارد برای آنها در لوله‌های نیمه‌پر، از یک الگوریتم بهینه‌سازی استفاده شد. مبانی این بهینه‌سازی، کمینه‌سازی همزمان خطای پیش‌بینی توزیع عرضی سرعت جریان و تنش برشی مرزی انتخاب شد. برای این منظور، معیار ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) برای هر یک از این دو متغیر محاسبه و تابع هدف به صورت زیر تعریف گردید:

$$\text{Obj} = W_u \times \text{RMSE}_u + W_\tau \times \text{RMSE}_\tau \quad (\text{رابطه ۹})$$

که  $W_u$  و  $\text{RMSE}_u$  به ترتیب ضریب و شاخص خطای شبیه‌سازی سرعت جریان، و  $W_\tau$  و  $\text{RMSE}_\tau$  به ترتیب ضریب و شاخص خطای شبیه‌سازی تنش برشی مرزی است. تابع هدف تنظیم شده در این حالت، امکان برقراری توازن میان دقت پیش‌بینی هر دو متغیر هیدرودینامیکی را فراهم می‌نماید، اگرچه میزان غلبه بهینه‌سازی هر یک از متغیرها را می‌توان تنظیم نمود. مثلاً در بعضی از موارد، اهمیت مقادیر سرعت‌های جریان بیشتر از تنش‌های برشی (مثل تخمین دبی) و در بعضی از شرایط (مثل طراحی لوله‌های غیررسوبگذار یا خودشستشو)، مقادیر تنش‌های برشی مهم‌تر است. در این مطالعه از مقادیر ۴ و ۲ برای ضرایب شبیه‌سازی سرعت و تنش برشی استفاده شد. فرآیند بهینه‌سازی با استفاده از Solver Toolbox نرم‌افزار اکسل و با بهره‌گیری از الگوریتم تکاملی<sup>۱</sup> انجام

<sup>۱</sup>. Evolutionary Algorithm

شد. این الگوریتم به دلیل دارا بودن قابلیت‌های مهمی مثل توانایی حل مسائل غیرخطی و غیرمحدب، عدم نیاز به مشتق‌پذیری تابع هدف، مقاومت بالا در برابر گیر افتادن در کمینه‌های محلی و مناسب بودن برای مسائل چندپارامتری با فضای جستجوی پیچیده انتخاب شد. در این الگوریتم، مجموعه‌ای از جواب‌های اولیه به صورت تصادفی تولید شده و طی نسل‌های متوالی، با استفاده از عملگرهای تکاملی نظیر انتخاب، جهش و ترکیب به تدریج به سمت پاسخ بهینه همگرا می‌شوند. محدودیت‌های فیزیکی و بازه‌های مجاز پارامترها بر اساس ملاحظات هیدرولیکی و مطالعات پیشین در فرآیند بهینه‌سازی اعمال گردید.

## داده‌های مورد استفاده

برای اجرای مدل شیونو و نایت و ارزیابی دقت نتایج آن در برآورد توزیع سرعت و تنش برشی در عرض لوله‌های رسوبگذار نیمه‌پر، از داده‌های آزمایشگاهی (Sterling, 1998) استفاده شد. این آزمایش‌ها در لوله‌ای از جنس Plastic PVC به قطر ۲۴۴ میلی-متر، ضخامت جداره ۳ میلی‌متر و طول ۲۱ متر و در شرایط جریان آشفته، یکنواخت، زیربحرانی و با رژیم صاف هیدرولیکی انجام شد. از چندین شیب کف مورد استفاده در این مطالعه، آزمایش‌های با شیب ۰/۰۰۱ برای این تحقیق استفاده شد. ضخامت عمق رسوب در این لوله ۸۱/۳ میلی‌متر انتخاب شد. در جدول ۱ خلاصه‌ای از ویژگی‌های هیدرولیکی این آزمایش‌ها به صورت مقادیر میانگین ارائه شده است. اندازه‌گیری سرعت‌ها و تنش‌های برشی نقطه‌ای در ۴ عمق مختلف جریان و در دو حالت کوچکتر و بزرگتر از شعاع لوله انجام شده است.

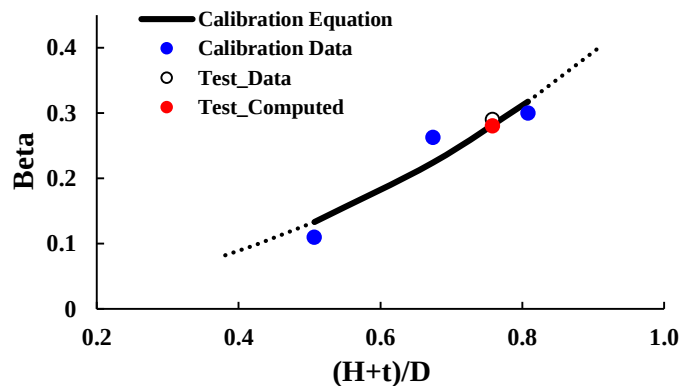
جدول ۱- خلاصه مقدارهای آزمایشگاهی پارامترهای هیدرولیکی (Sterling, 1998)

| Run | Flow depth<br>H (mm) | Flow rate<br>Q (ls <sup>-1</sup> ) | Flow velocity<br>V (ms <sup>-1</sup> ) | Shear stress<br>$\tau$ (Pa) | Froude<br>Number (Fr) | Reynolds<br>Number (Re) | Shear<br>Reynolds (Re <sup>*</sup> ) |
|-----|----------------------|------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------|--------------------------------------|
| ۱   | ۴۰/۷                 | ۴/۴۴                               | ۰/۴۵                                   | ۰/۶۱                        | ۰/۷۲                  | ۵۵۰۰۰                   | ۲/۲                                  |
| ۲   | ۸۱/۵                 | ۱۲/۳                               | ۰/۶۳                                   | ۰/۹۷                        | ۰/۶۹                  | ۱۱۴۰۰۰                  | ۲/۹                                  |
| ۲   | ۱۰۲/۰                | ۱۷/۳                               | ۰/۷۱                                   | ۱/۰۷                        | ۰/۶۷                  | ۱۵۱۰۰۰                  | ۳/۰                                  |
| ۴   | ۱۱۴/۲                | ۱۹/۹                               | ۰/۸۳                                   | ۱/۱۱                        | ۰/۷۲                  | ۱۸۴۰۰۰                  | ۳/۱                                  |

## یافته‌های پژوهش

### واسنجی ضرایب $\lambda$ و $\beta$

با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی اشاره شده در بخش‌های قبلی، مقادیر ضرایب لزجت گردابه‌ای و جریان‌های ثانویه در لوله واسنجی شدند. نتایج واسنجی این ضرایب نشان داد که ضریب  $\lambda$  برای عمق‌های مختلف جریان بین ۰/۰۰۵ و ۰/۰۰۷ متغیر است و بنابراین می‌توان از مقدار میانگین ۰/۰۰۶ استفاده نمود. برای ضریب  $\beta$  وضعیت تا حدودی متفاوت است. ابتدا این ضریب برای ۳ عمق جریان، واسنجی شد و سپس به کمک معادله به دست آمده، برای یک عمق جدید مورد آزمون قرار گرفت. در شکل ۸ نتایج مقادیر واسنجی و آزمون این ضریب نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که معادله استخراج شده برای مقادیر واسنجی دارای دقت مناسبی است، به طوری که مقدار ضریب جریان ثانویه را برای حالت آزمون با دقت مناسبی برآورد نموده است. به کمک منحنی این شکل، می‌توان ضریب را برای هر عمق نسبی دلخواه تخمین نمود.

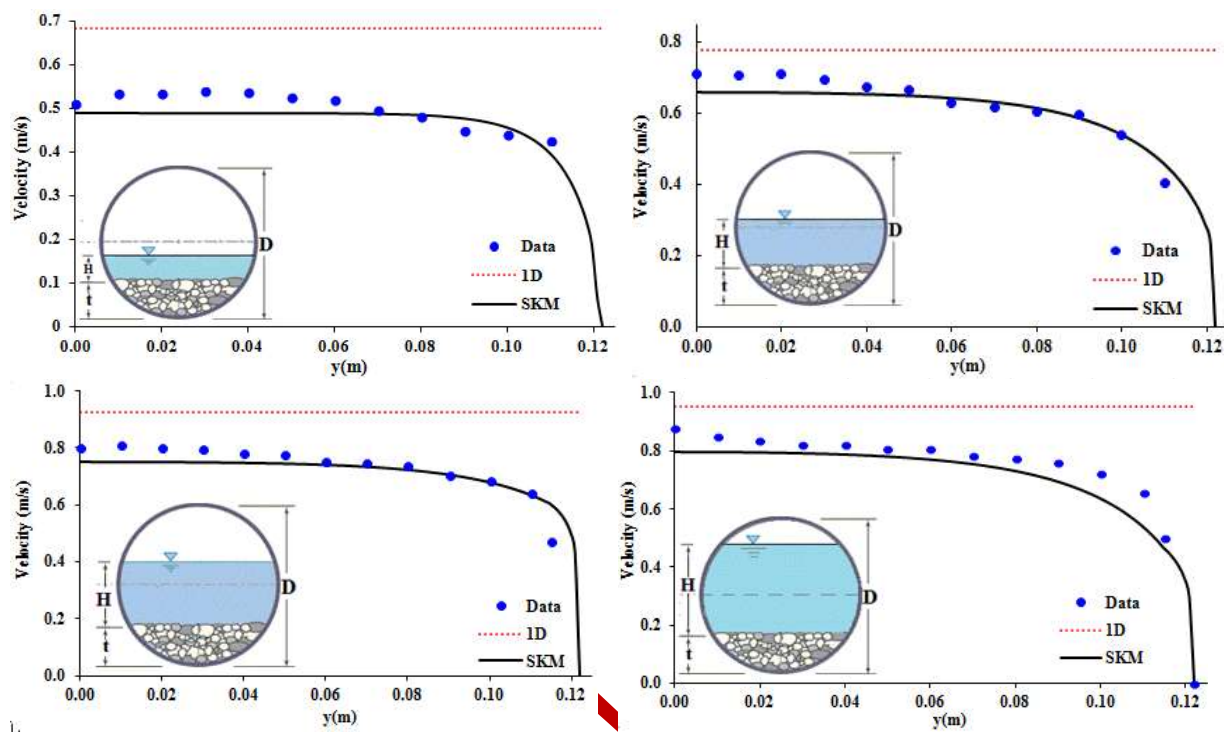


شکل ۸- نتایج مقادیر ضریب جریان‌های ثانویه در مراحل واسنجی و آزمون

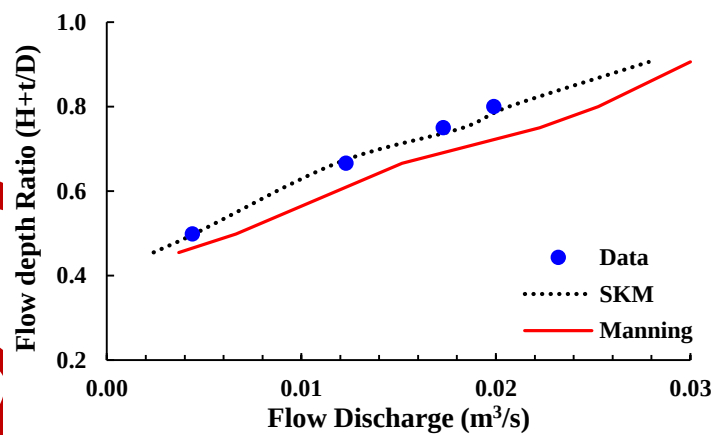
### نتایج توزیع عرضی سرعت و تنش برشی

با مشخص شدن ضرایب مدل شیونو و نایت، اکنون می‌توان مدل را برای هر عمقی از جریان اجرا نمود. نتایج این اجراها برای توزیع عرضی سرعت جریان در شکل ۹ و به ازاء ۴ عمق جریان نشان داده شده است. در این شکل‌ها، نتایج پروفیل‌های سرعت مشاهداتی و نیز سرعت متوسط جریان به‌دست آمده از معادله مانینگ هم نشان داده شده است. تقریباً در تمامی عمق‌های جریان، مطابقت توزیع عرضی سرعت مشاهداتی و محاسباتی در تمامی عرض لوله قابل قبول می‌باشد. خطای متوسط مدل ریاضی در برآورد سرعت حدود ۶ درصد و حداکثر این خطا حدود ۷/۷ درصد است که برای حداقل عمق جریان (۴۰/۷ میلی‌متر) به‌دست آمده است. همچنین در این شکل‌ها مشاهده می‌شود که در تمامی عمق‌های جریان، سرعت متوسط به‌دست آمده از معادله مانینگ از هر دو سرعت محاسباتی و مشاهداتی بیشتر است. بیشترین خطای فرمول مانینگ (حدود ۳۷ درصد) در حالت کمترین عمق جریان (۴۰/۷ میلی‌متر) اتفاق افتاده است. بعد از محاسبه توزیع عرضی سرعت، می‌توان دبی جریان را از انتگرال‌گیری عرضی از این توزیع به‌دست آورد. این نتایج در شکل ۱۰ و برای همه عمق‌های جریان محاسبه شده است. در این شکل، نتایج فرمول مانینگ هم نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج منحنی دبی-اشل به‌دست آمده از مدل شیونو و نایت در مقایسه با نتایج فرمول مانینگ، مطابقت بسیار بهتری با داده‌های آزمایشگاهی دارد.

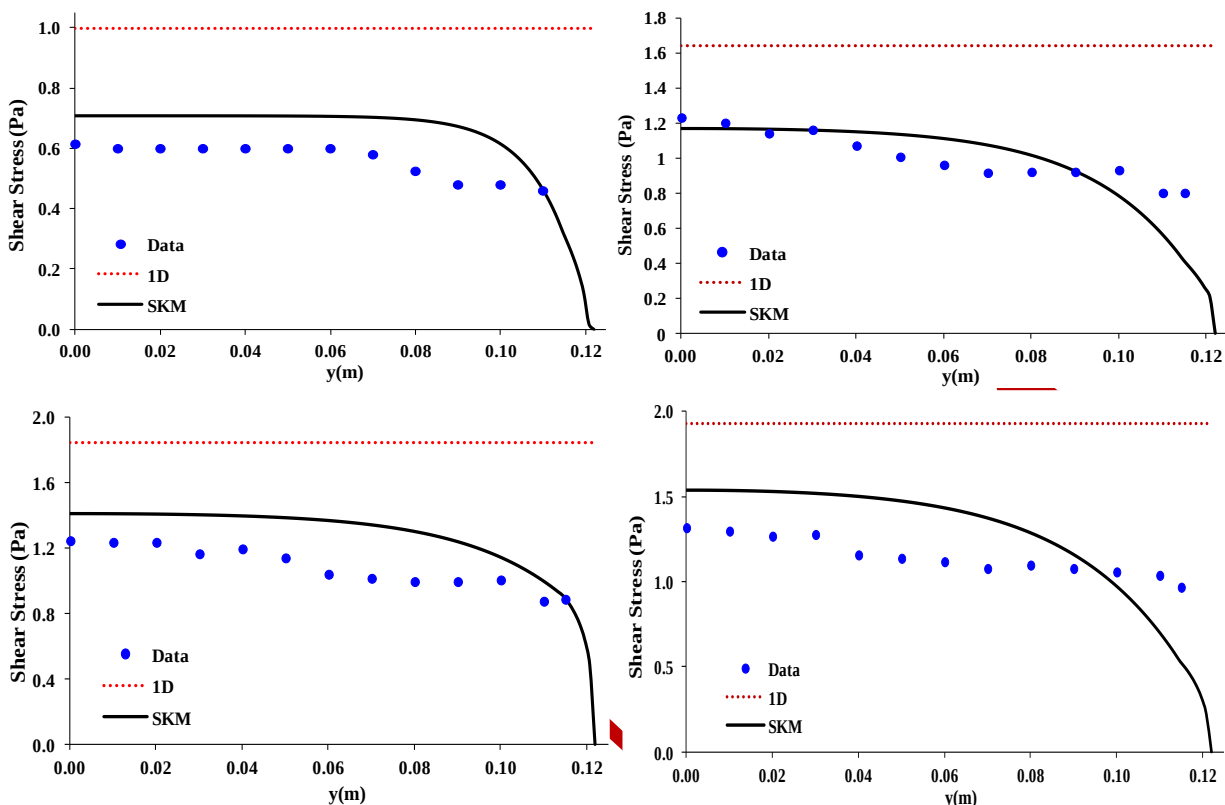
در شکل ۱۱ نتایج محاسبات توزیع عرضی تنش برشی مرزی از دو روش مناول (یک‌بعدی) و شیونو و نایت (دو‌بعدی) به همراه نتایج مشاهداتی نشان داده شده است. برخلاف توزیع عرضی سرعت جریان، تغییرات مقادیر تنش برشی مشاهداتی در عرض لوله در اغلب عمق‌های جریان چندان قابل ملاحظه نیست، به طوریکه تنش برشی متوسط تقریباً با تنش‌های برشی نقطه‌ای اختلاف زیادی ندارد. همچنین مشاهده می‌شود که روش یک‌بعدی، اختلاف زیادی با داده‌های مشاهداتی داشته و عملاً مقادیر بسیار بزرگتری را ارائه می‌دهد. خطای متوسط این روش حدود ۷۲/۲ درصد و حداکثر خطای آن حدود ۷۹/۷ می‌باشد که برای حداقل عمق جریان اتفاق افتاده است. نتایج مدل شیونو و نایت اگرچه با داده‌های مشاهداتی، مطابقت خوبی ندارند اما تا حدود زیادی بهتر از روش یک-بعدی بوده و برای تخمین اولیه‌ای از تنش برشی در لوله قابل استفاده می‌باشند. خطای متوسط این روش در تخمین تنش برشی کف این لوله حدود ۱۸/۵ درصد و حداکثر آن ۲۲ درصد می‌باشد.



شکل ۹- توزیع عرضی سرعت به ازاء عمق‌های مختلف جریان در یک لوله رسوبی نیمه‌پر  
(الف) ۴۰/۷، (ب) ۸۱/۵، (ج) ۱۰۲/۶ و (د) ۱۱۴/۲ میلی‌متر



شکل ۱۰- مقایسه منحنی‌های دبی-اشاره محاسباتی (مانینگ و شیونو و نایت) و مشاهداتی در لوله رسوبی نیمه‌پر مورد مطالعه



شکل ۱۱- مقایسه نتایج محاسباتی و مشاهداتی توزیع عرضی تنش برشی به ازاء عمق‌های مختلف جریان در یک لوله رسوبی نیمه پر  
(الف) ۴۰/۷، (ب) ۱۱/۵، (ج) ۱۰۲/۶ و (د) ۱۱۴/۲ میلی‌متر

## بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، از حل یک مدل شبه‌دو بعدی ساده و کاربردی مبتنی بر هیدرودینامیک جریان برای شبیه‌سازی توزیع عرضی سرعت جریان و تنش برشی بستر و نیز استخراج منحنی دبی-اشل در لوله‌های رسوبگذار نیمه‌پر استفاده شد. این راهکار به عنوان یک گزینه قابل قبول به جای مدل‌های یک بعدی متداول و نیز مدل‌های دو و سه بعدی مبتنی بر حل معادلات ناویر-استوکس معرفی و پیشنهاد شده است. نتایج حل این مدل برای توزیع عرضی سرعت و استخراج منحنی دبی-اشل یک لوله رسوبگذار نیمه‌پر نشان داد که:

۱. نتایج به دست آمده دارای دقت مناسبی بوده و استفاده از مدل شبه دو بعدی مورد بررسی در این تحقیق می‌تواند تا ۳۰ درصد خطای محاسبات دبی جریان را در مقایسه با فرمول مانینگ که کاربرد گسترده‌ای در حل مباحث هیدرولیک جریان در لوله‌های نیمه‌پر دارد، کاهش داده و جواب‌های دقیق‌تری ارائه دهد.
۲. برای توزیع عرضی تنش برشی هم چند شبیه‌سازی به کمک مدل شیونو و نایت در عمق‌های مختلف جریان انجام شد. نتایج این بخش نشان داد که تخمین مقادیر تنش برشی بستر در لوله‌های رسوبگذار نیمه‌پر در مقایسه با مقادیر سرعت جریان دارای دقت کمتری است و حدود ۱۸/۵ درصد با مقادیر واقعی تنش برشی اختلاف دارد. ذکر این نکته لازم است که خطای رابطه معمول که کاربرد زیادی در تخمین تنش برشی در رودخانه‌ها و مجاری روباز دارد، بیش از ۷۲ درصد است. بنابراین نتایج مدل شیونو و نایت به عنوان جواب‌های اولیه و مقدماتی، به خوبی نیاز محققین در طراحی و مدیریت سازه‌های آبی را برطرف می‌کند.
۳. زبری ناشی از رسوبات ته‌نشین شده در کف لوله تاثیر زیادی بر مقدار سرعت جریان و توزیع آن دارد و مشخص‌سازی مقدار دقیق ضریب زبری مانینگ برای نواحی رسوب‌گذاری شده با عدم قطعیت‌هایی همراه است. به همین دلیل در این تحقیق

استفاده از ارتفاع زبری معادل ( $k_s$ ) به جای ضریب زبری مانینگ مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان داد که استفاده از ارتفاع زبری معادل می‌تواند دقت مدل ریاضی مورد بررسی را افزایش دهد.

۴. برای تخمین ضریب بدون بعد لزجت گردابه‌ای ( $\lambda$ ) در این تحقیق و با توجه به عدم وجود مقادیری استاندارد برای آن در لوله‌های نیمه‌پر، از یک الگوریتم بهینه‌سازی استفاده شد. نتایج بهینه‌سازی این ضریب نشان داد که ضریب  $\lambda$  برای عمق‌های مختلف جریان بین ۰/۰۰۵ و ۰/۰۰۷ متغیر است و بنابراین می‌توان از مقدار میانگین ۰/۰۰۶ استفاده نمود.

۵. برای ضریب جریان‌های ثانویه ( $\beta$ ) با استفاده از مقادیر بهینه‌سازی شده، معادله‌ای به‌دست آمد که دارای دقت مناسبی در تخمین این ضریب در هر عمق نسبی جریان دلخواه است، به‌طوری‌که مقدار ضریب جریان ثانویه را برای حالت آزمون با دقت مناسبی برآورد می‌کند. از این روش می‌توان برای دیگر لوله‌های رسوبگذار نیز استفاده کرد و ضمن ارزیابی معادله به‌دست آمده در این تحقیق، معادلات دقیق‌تری برای لوله مورد نظر ارائه داد.

۶. مدل شبه‌دو بعدی شیونو و نایت با استفاده از معادلات مورد بررسی در این تحقیق، کارایی و دقت بالایی را در برآورد توزیع سرعت جریان و تنش برشی در عرض لوله‌های نیمه پر و رسوبگذار داشته و می‌تواند جایگزین بسیار خوبی برای مدل‌های یک بعدی مرسوم و مورد استفاده در این حوزه باشد.

## ملاحظات اخلاقی

### حامی مالی

این پژوهش هیچ‌گونه حمایت مالی از سازمان‌های دولتی، خصوصی یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.

### مشارکت نویسندگان

نویسندگان به طور مساوی در کلیه مراحل طراحی و انجام پژوهش، گردآوری داده‌ها، تجزیه و تحلیل آماری داده‌ها، تحلیل و تفسیر اطلاعات و نتایج، تهیه پیش نویس مقاله، بررسی و کنترل نتایج، اصلاح، بازبینی و نهایی‌سازی مقاله مشارکت داشتند.

اعلامیه هوش مصنوعی مولد و فناوری‌های مبتنی بر هوش مصنوعی در فرایند نگارش نویسندگان در فرایند نگارش مقاله از هیچ ابزار و یا نرم‌افزار هوش مصنوعی استفاده نکرده‌اند.

### بیانیه دسترسی به داده‌ها

تمامی داده‌های مورد استفاده در محاسبات این مقاله از طریق ارتباط با نویسنده مسئول قابل دریافت است.

### سپاسگزاری

از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان به‌خاطر حمایت و همکاری در اجرای پژوهش حاضر سپاسگزاری می‌شود.

### پیروی از اصول اخلاق پژوهش

نویسندگان اصول اخلاقی را در انجام و انتشار این پژوهش علمی رعایت نموده‌اند و این موضوع مورد تأیید همه آنها است.

### تعارض منافع

بنا بر اظهار نویسندگان، این مقاله تعارض منافع ندارد.

## منابع

ظهیری، عبدالرضا و شریفی، سروش (۱۴۰۴). توزیع عرضی سرعت جریان در مجاری روباز دایره‌ای. مجله هیدرولیک، (۳)، ۲۰-۱۲۴-۱۰۹.

## REFERENCES

- Abbs, T.J., Kells, J.A., and Katopodis, C. 2007. A model study of the hydraulics related to fish passage through backwatered culverts. 18<sup>th</sup> Canadian Hydrotechnical Conference Challenges for Water Resources Engineering in a Changing World. Winnipeg, Manitoba, Canadian Society of Civil Engineers.
- Akgiray, O. 2004. Simple formulae for velocity, depth of flow, and slope calculations in partially filled circular pipes. *Environmental Engineering Sciences*, 21(3), 371-385.
- Alawadi, W., Al-Rekabi, W.S., Al-Aboodi, A.H., 2018. Application of the Shiono and Knight method in asymmetric compound channels with different side slopes of the internal wall. *Applied Water Science*, 8(4). <https://doi.org/10.1007/s13201-018-0663-4>
- Alihosseini, M., and Thamsen, T.U. 2019. Numerical and experimental investigation of flow in partially filled sewer pipes. *Technische Mechanik*, 39(1), 113-124. DOI:10.24352/UB.OVGU-2019-011
- Azamathula, H.M.D., Ghani, A.Ab., and YenFei, S. 2011. ANFIS based approach for predicting sediment transport in clean sewer. *Applied Soft Computing*, 12, 1227-1230.
- Camp, T.R. 1946. Design of sewers to facilitate flow. *Sewage Works J.*, 18, 3-16.
- Funamizu, N., Yamashita, S., and Takakuwa, T. 1991. A uniform flow formula for the partially full flow in a circular pipe. *Bulletin of Faculty of the Engineering Hokkaido University*, 155, 1-9.
- Guo, J., Mohebbi, A. Zhai, Y. and Clark, S.P. 2015. Turbulent velocity distribution with dip phenomenon in conic open channels. *J. Hydraulic Research*, 53, 73-82.
- Jiang, Y., Li, B., and Chen, J. 2016. Analysis of the velocity distribution in partially-filled circular pipe employing the principle of maximum entropy. *PLoS ONE*, 11(3), e0151578. [doi.org/10.1371/journal.pone.0151578](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0151578)
- Kehler, N.J. 2009. Hydraulic characteristics of fully developed flow in circular culverts. Winnipeg, Manitoba: M.Sc. Thesis, University of Manitoba.
- Koutsospyrou, V., Sander, G., El-Hamalawi, A., Wallace, D., and Croft, M. 2025. Measuring variable discharge under partially full pipe flow. *Processes*, 13, 1089. <https://doi.org/10.3390/pr13041089>
- Li, W., Zhang, Q., Luo, X., and Chen, X. 2018. New method of flow measurements based on CFD for partially filled pipe. *Proceedings of the 2018 International Conference on Mathematics, Modeling, Simulation and Statistics Application (MMSSA 2018)*, Shanghai, China. [doi.org/10.2991/mmssa-18.2019.12](https://doi.org/10.2991/mmssa-18.2019.12)
- Mohebbi, A. 2014. Turbulent circular culvert flow: Implications to fish passage design. PhD Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Nebraska-Lincoln, 122p.
- Morrison, R.R., Hotchkiss, R.H., Stone, M., Thurman, D., and Horner-Devine, A.R. 2009. Turbulence characteristics of flow in a spiral corrugated culvert fitted with baffles and implications for fish passage. *Ecological Engineering*, 35(3), 381-392.
- Rameshwaran, P., and Shiono, K. 2007. Quasi two-dimensional model for straight overbank flows through emergent. *J. Hydraul. Res.*, 45(3), 302-315.
- Regueiro-Picallo, M., Naves, J., Jerónimo Puertas, J.A. and Suárez, J. 2016. Experimental and numerical analysis of egg-shaped sewer pipes flow performance. *Water*, 8, 1-9.
- Schall, J.D., Thompson, P.L., Zerges, S.M., and Kilgore, R.T. 2012. Hydraulic design of highway culverts: Hydraulic Design Series, Number 5. Federal Highway Administration.
- Shiono, K., and Knight, D.W. 1991. Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *J. Fluid Mechanics*, 222, 617-646.
- Sterling, M. 1998. A study of boundary shear stress, flow resistance and the free overfall in open channels with a circular cross section. PhD Thesis, Faculty of Civil Engineering, University of Birmingham, UK.
- Sterling, M., and Knight, D.W. 2000. Resistance and boundary shear in circular conduits with flat beds running part full. *Proc. Instn Civ. Engrs Water & Mar. Engng*, 229-240.
- Yoon, J.-I., Sung, J., and Lee, M.H. 2012. Velocity profiles and friction coefficients in circular open channels. *J. Hydraulic Research*, 50(3), 1-8.
- Zahiri, A., and Sharifi, S. 2025. Lateral velocity distribution in circular open channels. *J. Hydraulics*, 20(3), 109-124. <https://doi.org/10.30482/jhyd.2024.480078.1721>. (in Persian)
- Zeghadnia, L., Robert, J.L., and Achour, B. 2019. Explicit solutions for turbulent flow friction factor: A review, assessment and approaches classification. *Ain Shams Engineering Journal*, 10(1), 243-252.