

The Synergistic Effect of Trapezoidal Geometry and Lateral Slope in Piano Key Spillways

ABSTRACT

Piano key weirs (PKWs) are efficient hydraulic structures for flood control and water management because they increase the effective crest length within a limited footprint. Nevertheless, the geometric optimization of these structures remains an important research topic. This study experimentally investigates the synergistic effect of combining trapezoidal geometry with a global sidewall slope in Type-A PKWs. Four physical models, including rectangular and trapezoidal weirs with and without a 5° sidewall inclination, were tested in a 15-m laboratory flume. The results showed that for upstream head ratios (H/P) greater than 0.12, more than 75% of the crest length becomes engaged in the flow, and the discharge coefficient of sloped models increases noticeably. In addition, the sloped trapezoidal PKW (TPKW5) exhibited, on average, a 13% higher discharge coefficient than the sloped rectangular PKW (RPKW5), with a relative error lower than $\pm 2\%$, indicating a genuine synergistic interaction between the two geometric parameters. Moreover, the discharge efficiency of TPKW5 was about 5% higher than that of RPKW5. These findings suggest that the combined use of a trapezoidal planform and a global sidewall slope can be an effective strategy and intelligent combination for designing low-head spillways with superior hydraulic performance.

Keywords: Synergistic effect, Piano key weir, Global sidewall slope, Discharge coefficient, Hydraulic performance index, Trapezoidal geometry.

Extended English Abstract

Introduction

Piano Key Weirs (PKWs) have emerged as one of the most innovative spillway configurations developed in recent decades to enhance the discharge capacity of dams without requiring a substantial increase in crest width. The concept of PKWs evolved from labyrinth weirs, but their distinctive geometry—characterized by alternating inlet and outlet keys with overhangs—allows for a considerable increase in effective crest length within a compact footprint. This characteristic makes PKWs particularly attractive for upgrading existing dams whose spillway capacity is insufficient to safely pass extreme flood events.

Increasing flood magnitudes and changing hydrological conditions, often associated with climate variability and land-use changes, have intensified the need to improve the safety and hydraulic capacity of spillways. In many existing dams, structural limitations prevent significant widening of the spillway crest or the installation of large gated systems. In such cases, PKWs offer a practical and cost-effective solution for increasing discharge capacity while minimizing structural modifications.

The hydraulic performance of PKWs is influenced by several geometric and hydraulic parameters. These include the crest height, the ratio of upstream head to crest height, inlet and outlet key widths, key overhang lengths, wall thickness, and the slope of the keys. The complex geometry of PKWs produces intricate flow patterns that differ significantly from those observed in conventional linear weirs. As water approaches the structure, the flow is distributed among multiple inlet keys, accelerates over the crest edges, and subsequently merges in the outlet keys before leaving the structure.

Because of these complex hydraulic interactions, the discharge coefficient of PKWs is not solely determined by a single parameter but rather by the combined influence of multiple geometric and hydraulic factors. Over the past two decades, numerous experimental and numerical investigations have attempted to quantify these relationships and develop predictive equations for discharge capacity. However, despite substantial progress, several aspects of PKW hydraulics remain insufficiently

understood. In particular, the simultaneous influence of multiple geometric parameters and the potential interaction between them require further investigation.

The primary objective of this study is to experimentally investigate the hydraulic performance of a Piano Key Weir configuration and to analyze the influence of key geometric parameters on the discharge coefficient. The study focuses on examining how variations in upstream head conditions and geometric ratios affect the discharge behavior of the structure.

A specific objective of this research is to explore the potential interaction effects between geometric parameters. Instead of considering each parameter independently, the study examines whether the simultaneous variation of parameters produces combined effects that influence the discharge coefficient in a non-linear manner.

In addition, the study aims to compare the experimental results with data reported in previous studies in order to evaluate the reliability and consistency of the obtained findings. Statistical error indicators and relative error calculations are used to assess the agreement between the present results and reference data available in the literature.

Method

The research was conducted through a controlled experimental program using a physical model installed in a laboratory flume. The experimental setup consisted of a recirculating hydraulic channel equipped with a flow regulation system, a measurement section, and a downstream tailwater control system. The flume was designed to ensure uniform approach flow conditions upstream of the tested structure.

A physical model of the Piano Key Weir was fabricated using rigid materials with precise geometric dimensions to accurately represent the desired configuration. The model included alternating inlet and outlet keys arranged along the spillway crest. The geometry of the structure allowed the effective crest length to be significantly greater than the channel width.

During the experiments, different upstream flow conditions were generated by adjusting the inflow discharge. For each experimental run, the upstream water level above the crest was carefully measured once steady flow conditions were achieved. The corresponding discharge passing over the weir was recorded using calibrated flow measurement devices.

The discharge coefficient was determined using the standard weir discharge equation:

$$Q = C_d \times L \times \sqrt{(2g) \times H^{3/2}}$$

where Q represents the measured discharge, C_d is the discharge coefficient, L is the effective crest length, g is the gravitational acceleration, and H is the upstream head over the crest.

The measured data were processed to calculate discharge coefficients for the different flow conditions. Dimensionless parameters such as the ratio of upstream head to crest height were used to analyze the hydraulic behavior of the structure and to identify general trends in the variation of C_d .

To evaluate the reliability of the obtained results, the experimental data were compared with results reported in previous investigations of Piano Key Weirs. Statistical indicators including root mean square error (RMSE), mean absolute error (MAE), and bias were used to quantify the level of agreement between the datasets. In addition, the relative error of the discharge coefficient was calculated to verify the precision of the experimental measurements.

Results & Discussion

The experimental results demonstrate that the discharge coefficient varies systematically with the upstream head ratio. At relatively small head values, the discharge coefficient increases gradually as the upstream head increases. This trend can be attributed to the progressive development of flow over the crest and the reduction of local energy losses as the flow becomes fully established across the keys.

As the upstream head continues to increase, the discharge coefficient approaches a relatively stable range, indicating that the hydraulic behavior of the structure becomes less sensitive to further increases in head. This behavior is consistent with the hydraulic characteristics observed in other studies of PKWs and labyrinth weirs.

The results also show that the geometric configuration of the weir plays a critical role in determining the magnitude of the discharge coefficient. Variations in geometric parameters influence the distribution of flow across the keys, the acceleration of water over the crest edges, and the interaction between adjacent flow streams.

Analysis of the experimental data indicates that the combined influence of certain geometric parameters may produce interaction effects in the discharge behavior. In particular, when parameters such as head ratio and crest geometry vary simultaneously, the resulting change in discharge coefficient does not always correspond to the simple additive effect of each parameter considered separately. Instead, the hydraulic response reflects a coupled behavior arising from the interaction between the governing variables.

The comparison with previously published datasets revealed good agreement between the present results and those reported in the literature. The computed statistical indicators demonstrate that the differences between the datasets are relatively small. The calculated relative error of the discharge coefficient was consistently below ± 2 percent, indicating that the experimental measurements and analytical calculations provide a reliable representation of the hydraulic performance of the tested configuration.

The findings of this study highlight the importance of geometric design in determining the hydraulic efficiency of Piano Key Weirs. The increased crest length provided by the PKW configuration allows a greater discharge capacity compared with conventional straight weirs of similar width. However, the hydraulic efficiency of the structure depends strongly on the arrangement and proportions of the keys.

The observed variation of the discharge coefficient with upstream head ratio reflects the complex flow processes occurring over the crest and within the keys. At lower heads, partial submergence and localized flow separation may reduce discharge efficiency. As the head increases, these effects diminish and the flow becomes more uniformly distributed across the crest.

The interaction effects identified in the analysis suggest that PKW design should consider the combined influence of multiple parameters rather than optimizing each parameter independently. Because the hydraulic performance results from the integration of several geometric features, modifications to one parameter may alter the hydraulic behavior associated with others.

The comparison with earlier studies confirms that the results obtained in this research are consistent with established experimental observations. The relatively small error values further support the reliability of the experimental methodology and the accuracy of the measurements.

Conclusions

This study experimentally investigated the hydraulic performance of a Piano Key Weir configuration in a laboratory flume. The analysis focused on the influence of upstream head conditions and geometric parameters on the discharge coefficient.

The results demonstrate that the discharge coefficient varies systematically with the upstream head ratio and that geometric characteristics significantly influence the hydraulic behavior of the structure. The experimental observations also indicate the presence of interaction effects between certain geometric parameters, suggesting that PKW performance is governed by the combined influence of multiple design variables.

The comparison with previously published results showed good agreement, and the calculated relative error of the discharge coefficient remained below ± 2 percent. These findings confirm the reliability of the experimental results and support their relevance for improving the understanding of PKW hydraulics.

Overall, the study contributes to the ongoing development of design knowledge for Piano Key Weirs and provides additional experimental evidence that may assist engineers in optimizing spillway configurations for improved flood discharge capacity and dam safety.

Author Contributions

Author: Conceptualization, methodology development, experimental design, data analysis, and writing of the original manuscript draft, data collection, manuscript review and editing, review and editing of the manuscript, and overall project administration.

Data Availability Statement

The data that support the findings of this study are available from the corresponding author upon reasonable request. The dataset includes measured discharge values, upstream head measurements, geometric parameters of the tested Piano Key Weir configuration, and the calculated discharge coefficients used in the analysis.

Acknowledgements

The author would like to express their sincere appreciation to the laboratory staff and technical assistants of Bu-Ali Sina university who supported the experimental work. The author also acknowledge the institutional support provided by their affiliated university and research facilities, which made the experimental program possible.

Ethical Considerations

The author declare that this research did not involve human participants or animals. All experiments were conducted using a physical hydraulic model in a laboratory environment. The study followed accepted academic and research integrity standards, and all sources used in the manuscript have been appropriately cited.

اثر هم‌افزایی هندسه دوزنقه‌ای و شیب جانبی در سرریزهای کلیدپیانویی

چکیده

سرریزهای کلیدپیانویی (PKW) به دلیل افزایش طول مؤثر تاج در فضای محدود، گزینه‌ای کارآمد برای کنترل سیلاب و مدیریت جریان آب هستند. در این پژوهش، اثر هم‌افزایی ناشی از ترکیب هندسه دوزنقه‌ای و شیب سراسری دیواره جانبی در سرریزهای کلیدپیانویی نوع A به صورت آزمایشگاهی بررسی شد. بدین منظور، چهار مدل فیزیکی شامل سرریزهای مستطیلی و دوزنقه‌ای، هر یک با و بدون شیب ۵ درجه، در یک فلوم آزمایشگاهی ۱۵ متری مورد آزمایش قرار گرفتند. نتایج نشان داد که در نسبت بار آبی H/P بزرگ‌تر از ۰/۱۲، بیش از ۷۵ درصد طول تاج درگیر جریان می‌شود و ضریب دبی در مدل‌های دارای شیب جانبی به طور محسوسی افزایش می‌یابد. همچنین، مدل دوزنقه‌ای شیب‌دار (TPKW5) به طور میانگین ۱۳ درصد ضریب دبی بیشتری نسبت به مدل مستطیلی شیب‌دار (RPKW5) داشت (با خطای نسبی کمتر از ± 2 درصد) که بیانگر وجود یک اثر هم‌افزایی واقعی میان دو پارامتر هندسی است. افزون بر این، شاخص عملکرد دبی در TPKW5 حدود ۵ درصد بیشتر از RPKW5 بود. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که ترکیب مناسب و هوشمندانه هندسه دوزنقه‌ای و شیب کلی دیواره جانبی می‌تواند راهبردی مؤثر برای طراحی سرریزهای کم‌عمق با عملکرد هیدرولیکی برتر باشد.

کلیدواژه‌ها: اثر هم‌افزایی، سرریز کلیدپیانویی، شیب سراسری دیواره جانبی، ضریب دبی، شاخص عملکرد هیدرولیکی، هندسه دوزنقه‌ای.

مجله نشریات
مهندسی نقشه

مقدمه

سرریزها از حیاتی‌ترین اجزای سازه‌های آبی به‌شمار می‌روند که وظیفه کنترل سیلاب، تنظیم سطح آب و تضمین ایمنی سدها را بر عهده دارند. با افزایش وقوع سیلاب‌های ناشی از تغییرات اقلیمی، بسیاری از سدهای موجود با مشکل عدم کفایت ظرفیت تخلیه مواجه هستند. از سوی دیگر، محدودیت‌های هندسی و سازه‌ای در تکیه‌گاه‌ها، امکان تعریض سرریزهای مستقیم را سلب کرده است. در چنین شرایطی، استفاده از سرریزهای غیرخطی، به‌ویژه سرریزهای کلیدپیانویی (Piano Key Weirs – PKWs)، به دلیل قابلیت افزایش قابل توجه طول مؤثر تاج در یک عرض ثابت (Sangsefidi et al., 2021; Kheir-Abadi et al., 2020)، راهکاری اقتصادی و فنی برای ارتقای ایمنی سدها محسوب می‌شود.

عملکرد هیدرولیکی این سرریزها به‌شدت تحت تأثیر جزئیات هندسی کلیدهای ورودی و خروجی، شیب دیواره‌ها و شکل تاج قرار دارد. با وجود پیشرفت‌های حاصل شده در شناخت رفتار این سازه‌ها، هنوز ابهامات و دیدگاه‌های متناقضی در خصوص اثر متقابل برخی پارامترهای هندسی بر ضریب دبی وجود دارد. به‌ویژه، تأثیر هم‌زمان تغییر شکل کلید (مستطیلی به ذوزنقه‌ای) و اعمال شیب سراسری در دیواره‌های جانبی، موضوعی است که در مطالعات پیشین به‌صورت نظام‌مند بررسی نشده است (Ahmadi et al., 2024; Bagheri & Heidarpour, 2024; Gharahjeh & Aydin, 2024; Rezaei et al., 2025; Zhou et al., 2025). عدم وضوح در مورد «اثرات هم‌افزایی» این دو پارامتر، طراحی

بهینه این سرریزها را با چالش مواجه کرده است.

سرریزهای کلیدپیانویی بر اساس نحوه قرارگیری کلیدهای ورودی و خروجی و موقعیت دیواره‌های جانبی نسبت به بدنه سرریز به چند نوع اصلی تقسیم‌بندی می‌شوند. در رایج‌ترین طبقه‌بندی، این سرریزها به انواع A، B، C و D دسته‌بندی می‌شوند. در نوع A، کلیدهای ورودی و خروجی به‌صورت متقارن در دو طرف تاج سرریز توسعه یافته و دیواره‌های جانبی بر روی بدنه سرریز قرار می‌گیرند. در نوع B، کلیدهای خروجی از بدنه سرریز به سمت پایین دست گسترش یافته‌اند، در حالی که در نوع C، کلیدهای ورودی در سمت بالادست توسعه پیدا می‌کنند. نوع D ترکیبی از ویژگی‌های انواع B و C محسوب می‌شود که در آن کلیدها در هر دو جهت توسعه می‌یابند.

در پژوهش حاضر از سرریز کلیدپیانویی نوع A استفاده شده است که به دلیل سادگی ساخت، پایداری هیدرولیکی مناسب و کاربرد گسترده در مطالعات آزمایشگاهی، یکی از متداول‌ترین انواع سرریزهای PKW به‌شمار می‌رود.

پژوهش حاضر با هدف پر کردن این شکاف علمی، به بررسی آزمایشگاهی اثرات ترکیب هندسه ذوزنقه‌ای و شیب کلی دیواره جانبی در سرریزهای کلیدپیانویی نوع A می‌پردازد (Ahmadi et al., 2024; Rezaei et al., 2025; Zhou et al., 2025). در این راستا، با ثابت نگه داشتن برخی پارامترهای ثانویه نظیر هندسه پاراپت و تمرکز بر لبه‌های تیز تاج (به‌عنوان شرایط متداول طراحی)، اثر تغییرات هندسی اصلی بر ضریب دبی و شاخص عملکرد هیدرولیکی ارزیابی شده است. نتایج این تحقیق می‌تواند به‌عنوان راهنمای عملی در طراحی سرریزهای پرکارایی برای پروژه‌های نوسازی و احداث سازه‌های آبی مورد استفاده قرار گیرد.

پیشینه پژوهش

توسعه و بهینه‌سازی سرریزهای کلیدپیانویی در دهه‌های اخیر موضوع تحقیقات متعددی بوده است. مطالعات اولیه نشان داد که این سازه‌ها با افزایش طول تاج نسبت به سرریزهای مستقیم، ظرفیت تخلیه را در ده‌های کم تا متوسط به‌طور چشمگیری افزایش می‌دهند (Leite-Ribeiro et al., 2012; Machiels et al., 2009). علاوه بر هندسه اصلی، عملکرد این سرریزها در شرایط واقعی نظیر حضور آشغال و گرفتگی نیز بررسی شده است؛ برای نمونه، Mansouri and Ahadian (2016) اثر گرفتگی ناشی از جریان‌های حاوی debris را بر کاهش کارایی این سرریزها گزارش کرده‌اند.

بخش مهمی از ادبیات فنی بر بهینه‌سازی پارامترهای هندسی متمرکز است. Cicero et al. (2013) و Kumar et al. (2020) نشان دادند که مدل‌های ذوزنقه‌ای نسبت به نوع مستطیلی بین ۵ تا ۲۰ درصد ضریب دبی بالاتری دارند. ازسوی دیگر، Sohrabzadeh & Ghodsian

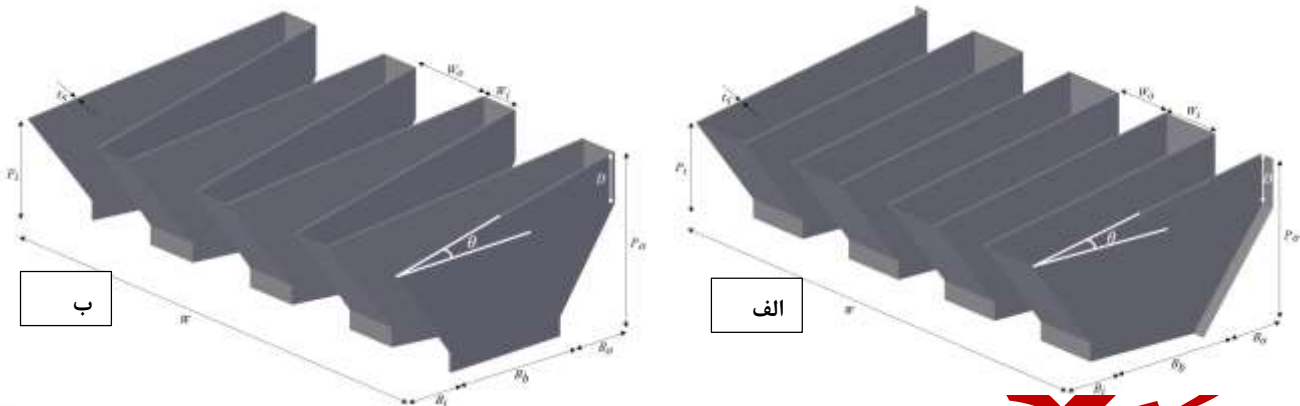
(2022) در بررسی سرریزهای مثلثی شیب‌دار، افزایش ضریب دبی را گزارش کردند. همچنین، Crookston et al. (2021) بر اهمیت نسبت عرض کلید ورودی به خروجی (Wi/Wo) تأکید کرده و مقادیر بزرگ‌تر از یک را موجب بهبود عملکرد دانستند. تأثیر اجزای جانبی نظیر شکل پایه‌ها (Afzalian & Ahadiyan, 2016) و استفاده از بافل در کلیدهای خروجی (Sajadi et al., 2017) نیز از مواردی است که بهبود ظرفیت عبور جریان را به دنبال داشته است (Rezaei et al., 2025; Zhou et al., 2025).

در خصوص جزئیات لبه تاج، Kabiri-Samani et al. (2021) نشان دادند که گرد کردن لبه‌ها به دلیل جلوگیری از جدایش جریان، ضریب دبی را تا ۸ درصد افزایش می‌دهد. با این حال، در زمینه اثر شیب دیواره‌های جانبی، نتایج متناقضی گزارش شده است؛ به طوری که Afzalian & Ahadiyan (2015) کاهش عملکرد و Sohrabzadeh-Anzani & Ghodsian (2023) افزایش عملکرد را در اثر شیب‌دهی گزارش کردند. همچنین، پارامترهایی نظیر هندسه پاراپت بر توزیع فشار و ارتعاشات سازه‌ای تأثیرگذار شناخته شده‌اند (Yarmohammadi & Ahadian, 2016; Shaker et al., 2023). علی‌رغم این مطالعات، بررسی نظام‌مند ترکیب هندسه دوزنقه‌ای و شیب سراسری دیواره (Erpicum et al., 2017; Ahmadi et al., 2024; Rezaei et al., 2025; Zhou et al., 2025) همچنان به‌عنوان یک ضرورت پژوهشی باقی مانده است.

مواد و روش‌ها

آزمایش‌های این پژوهش در آزمایشگاه هیدرولیک دانشکده مهندسی دانشگاه بوعلی سینا انجام شد. از یک فلوم مستطیلی با دیواره‌ها و کف شیشه‌ای به طول ۱۵ متر، ارتفاع و عرض ۶۰ سانتی‌متر به‌عنوان بستر اصلی آزمایش استفاده گردید. جریان آب از طریق یک شیر کنترلی از مخزن زیرزمینی به فلوم هدایت شد و پس از عبور از سازه مورد مطالعه، مجدداً به همان مخزن بازگردانده شد. دبی جریان در طول آزمایش‌ها با استفاده از یک سرریز مستطیلی لبه‌تیز نصب‌شده در انتهای فلوم اندازه‌گیری شد. برای این منظور، ارتفاع آب روی سرریز توسط یک گیج نقطه‌ای با دقت ۰٫۱ میلی‌متر اندازه‌گیری و سپس دبی جریان با استفاده از رابطه استاندارد سرریز مستطیلی محاسبه گردید. پیش از انجام آزمایش‌ها، سیستم اندازه‌گیری کالیبره شد تا از دقت اندازه‌گیری‌ها اطمینان حاصل شود. در تمامی آزمایش‌ها شرایط جریان آزاد برقرار بود و سطح آب پایین‌دست به‌گونه‌ای تنظیم شد که هیچ‌گونه غرقاب‌شدگی در تاج سرریز ایجاد نشود. بدین ترتیب، جریان عبوری از سرریزها به‌صورت آزاد و بدون تأثیر شرایط پایین‌دست برقرار بود. محدوده دبی آزمایش‌ها بین ۳/۲۵ تا ۷۲/۶۲ لیتر بر ثانیه تنظیم گردید.

در این مطالعه، چهار مدل فیزیکی از سرریزهای کلیدپیانویی نوع A طراحی و ساخته شدند که شامل دو هندسه مستطیلی و دوزنقه‌ای با شیب دیواره جانبی صفر درجه (مدل‌های بدون شیب) و پنج درجه (مدل‌های شیب‌دار) بودند. به دلیل تمرکز پژوهش بر مقایسه عملکرد هیدرولیکی، شکل ۱ به نمایش نماهای اصلی هندسه محدود شده است و ابعاد مؤثر در تحلیل در متن ارائه شده‌اند. شکل ۱ نمایش شمای کلی پیکربندی‌های مورد بررسی ابعاد هندسی سرریزهای کلیدپیانویی مستطیلی و دوزنقه‌ای را نشان می‌دهد. مدل‌های سرریز کلیدپیانویی مستطیلی و دوزنقه‌ای با دبی‌های حداقل و حداکثر فوق‌الذکر تحت آزمایش قرار گرفتند. این مدل‌ها با استفاده از نرم‌افزار AutoCAD طراحی شده و با ضخامت ۵ میلی‌متری، از ورق‌های PVC به‌روش برش لیزری ساخته شدند. اتصال قطعات با استفاده از چسب سریع‌الثر (برند ۱۲۳، ایران) انجام گرفت. سپس، مدل‌های ساخته‌شده در یک متر پایانی فلوم قرار داده شدند و با استفاده از چسب سیلیکونی به‌طور کامل آب‌بندی گردیدند. این بخش از فلوم با استفاده از یک انتقال واگرا فولادی، از عرض ۶۰ سانتی‌متر به ۹۷ سانتی‌متر گسترش یافت تا شرایط لازم برای نصب سازه‌ها فراهم شود.



شکل ۱. ابعاد هندسی سرریزهای کلیدیپانویی الف-مستطیلی و ب-دو زنگه ای

عمق جریان در فاصله‌ای برابر با دو برابر ارتفاع سرریز (به دلیل انحراف اندک سطح آزاد جریان) با استفاده از عمق سنج دیجیتال با دقت $\pm 0,1$ میلی‌متر اندازه‌گیری شد. برای تعیین طول مؤثر تاج (طول مرطوب)، پس از برقراری جریان پایدار و مشاهده خط آب روی دیواره‌های جانبی، جریان متوقف و طول مرطوب هر مدل با استفاده از خط‌کش دیجیتال (دقت $\pm 0,1$ میلی‌متر) مستقیماً اندازه‌گیری گردید. این پارامتر به‌عنوان یکی از عوامل کلیدی در محاسبه ضریب دبی و شاخص عملکرد هیدرولیکی در نظر گرفته شد. همان‌طور که در

جدول ۱ مشاهده می‌شود، مدل‌های مورد مطالعه شامل: سرریز کلیدیپانویی مستطیلی بدون شیب (RPKW0)، سرریز کلیدیپانویی مستطیلی با شیب ۵ (RPKW5)، سرریز کلیدیپانویی دو زنگه‌ای بدون شیب (TPKW0) و سرریز کلیدیپانویی دو زنگه‌ای با شیب ۵ (TPKW5) می‌باشند. در این مدل‌ها، تعداد چرخه‌ها چهار عدد و نسبت‌های هندسی کلیدهای ورودی و خروجی (W_i/W_o) در هر دو هندسه به‌صورت یکسان حفظ شده است.

جدول ۱. مشخصات هندسی مدل‌های آزمایشگاهی سرریزهای کلیدیپانویی مورد مطالعه

مدل	نوع هندسه	شیب دیواره جانبی ($^\circ$)	طول کل تاج (L) [cm]	عرض کلید ورودی (Wi) [cm]	عرض کلید خروجی (Wo) [cm]	عرض کل سازه (W) [cm]	ارتفاع تاج بالادست [cm] (Pi)	ارتفاع تاج پایین‌دست [cm] (Po)	عرض پایه (B) [cm]	تعداد چرخه‌ها (N)
RPKW0	مستطیلی	۰	۴۹۳	۱۲/۵	۱۲/۵	۹۷	۲۰	۲۰	۲۵	۴
RPKW5	مستطیلی	۵	۴۹۴/۵	۱۲/۵	۱۲/۵	۹۷	۲۰	۲۴/۴	۲۵	۴
TPKW0	دو زنگه‌ای	۰	۴۵۳/۴	۱۷/۵	۷/۵	۹۷	۲۰	۲۰	۲۵	۴
TPKW5	دو زنگه‌ای	۵	۴۵۴/۹	۱۷/۵	۷/۵	۹۷	۲۰	۲۴/۴	۲۵	۴

توضیحات:

* در تمام مدل‌ها، ضخامت ورق (Ts) برابر با ۵ میلی‌متر و زاویه دیواره کلید در PKW نوع (A) برابر 53° در نظر گرفته شده است.

** نسبت عرض کلیدهای ورودی به خروجی در مدل‌های مستطیلی برابر ۱ و در مدل‌های دو زنگه‌ای برابر ۲,۳۳ است.

*** افزایش ارتفاع پایین‌دست (Po) در مدل‌های شیب‌دار (RPKW5) و (TPKW5) ناشی از شیب 5° و ثابت نگه داشتن ارتفاع تاج بالادست (Pi) است.

تحلیل عدم قطعیت اندازه گیری ها

با توجه به اینکه نتایج این پژوهش بر اساس داده های آزمایشگاهی به دست آمده اند، به منظور ارزیابی میزان اطمینان پذیری نتایج، تحلیل عدم قطعیت اندازه گیری ها انجام شد. مهم ترین پارامترهای مورد استفاده در محاسبه ضریب دبی سرریز کلیدپیانویی شامل دبی جریان (Q)، هد کل بالادست روی تاج سرریز (H) و طول مؤثر تاج سرریز (Lw) هستند. عدم قطعیت هر یک از این متغیرها ناشی از محدودیت دقت ابزارهای اندازه گیری و خطاهای قرائت در حین انجام آزمایش ها است.

دبی جریان در آزمایش ها با استفاده از سیستم اندازه گیری دبی کالیبره شده آزمایشگاه اندازه گیری شد که دقت آن در حدود $\pm 1\%$ درصد برآورد گردید. ارتفاع آب بالادست نسبت به تاج سرریز با استفاده از گیج نقطه ای با دقت ± 0.5 میلی متر اندازه گیری شد. همچنین طول مرطوب تاج سرریز بر اساس ابعاد هندسی مدل های فیزیکی و با استفاده از کولیس دیجیتال با دقت ± 1 میلی متر تعیین گردید. این مقادیر به عنوان منابع اصلی عدم قطعیت در اندازه گیری پارامترهای مورد استفاده در محاسبه ضریب دبی در نظر گرفته شدند.

ضریب دبی سرریز (Cd) بر اساس رابطه متداول دبی سرریز به صورت رابطه (۱) محاسبه می شود:

$$Q = C_d L_w \sqrt{2g} H^{3/2} \quad \text{رابطه (۱)}$$

بر این اساس، عدم قطعیت ضریب دبی با استفاده از رابطه عمومی انتشار خطا با معادله ۲ قابل برآورد است:

$$u(C_d) = \sqrt{\left(\frac{\partial C_d}{\partial Q} u_Q\right)^2 + \left(\frac{\partial C_d}{\partial H} u_H\right)^2 + \left(\frac{\partial C_d}{\partial L_w} u_{L_w}\right)^2} \quad \text{رابطه (۲)}$$

که در آن u_Q ، u_H و u_{L_w} به ترتیب عدم قطعیت اندازه گیری دبی، هد بالادست و طول مرطوب تاج سرریز را نشان می دهند. با توجه به دقت ابزارهای مورد استفاده و اعمال رابطه انتشار خطا، عدم قطعیت نهایی ضریب دبی محاسبه شده در آزمایش های این پژوهش در حدود ۲ تا ۳ درصد برآورد شد (جدول ۲). این مقدار در مقایسه با اختلاف های مشاهده شده بین مدل های مورد بررسی بسیار کوچک تر است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که تغییرات مشاهده شده در ضریب دبی عمدتاً ناشی از تفاوت در هندسه سرریزهای مورد مطالعه و نه خطاهای اندازه گیری آزمایشگاهی بوده است.

جدول ۲. خلاصه عدم قطعیت اندازه گیری پارامترهای آزمایش

پارامتر	ابزار	دقت ابزار	عدم قطعیت نهایی
دبی Q	فلومتر	$\pm 1\%$	$\pm 1/2\%$
هد بالادست H	خطکش	± 0.5 mm	$\pm 0.7\%$
طول مرطوب تاج Lw	کولیس دیجیتال	± 1 mm	$\pm 1\%$
ضریب دبی Cd	محاسبه شده	—	$\pm 2-3\%$

علاوه بر خطای ابزارهای اندازه گیری، تعیین طول مرطوب تاج سرریز نیز می تواند تحت تأثیر وضوح مرز جریان قرار گیرد، به ویژه در دبی های پایین. این موضوع یکی از منابع بالقوه عدم قطعیت در اندازه گیری طول مؤثر تاج سرریز محسوب می شود.

تحلیل ابعادی گسترش یافته

در تحلیل رفتار هیدرولیکی این سرریزها، تابع دبی (Q) به صورت کلی تابعی از پارامترهای هندسی، فیزیکی و جریانی مطابق معادله ۳ است:

$$Q=f(W_i, W_o, W, B, L, P_i, P_o, \theta, g, \rho, \mu, \sigma, H_t, L', t) \quad (3)$$

که در آن:

W_i, W_o : عرض کلیدهای ورودی و خروجی (m)

W : عرض کل سازه (m)

B : عرض پایه سرریز (m)

L : طول کل تاج (m)

P_i, P_o : ارتفاع‌های تاج در بالادست و پایین‌دست (m)

θ : زاویه شیب دیواره جانبی نسبت به محور قائم (درجه)

g : شتاب گرانش (m/s^2)

ρ, μ, σ : چگالی، ویسکوزیته دینامیکی و کشش سطحی آب ($N/m, Pa \cdot s, kg/m^3$)

H_t : بار کل آبی (m)

N : تعداد چرخه‌ها

t, L' : طول مؤثر مرطوب (m) و ضخامت دیواره (m)

با استفاده از روش π باکینگام و انتخاب پارامترهای تکرارشونده g, H_t, ρ به‌عنوان اساس ابعادی، می‌توان رابطه فوق را به‌صورت بی‌بعد

به‌صورت رابطه ۴ بازنویسی کرد:

$$C_d = f\left(\frac{W_i}{W_o}, \frac{W_i}{W}, \frac{B}{W}, \frac{L}{W}, \frac{H_t}{P_i}, \frac{L'}{L}, \theta, \frac{P_o}{P_i}, \frac{t}{P_i}, \frac{B}{P_i}, We, Fr\right) \quad (4)$$

که در آن:

$$\text{ضریب دبی به صورت } C_d = \frac{Q}{L\sqrt{2gH_t^3}} \text{ تعریف می‌شود،}$$

عدد وبر ($We = \frac{\rho g H_t^2}{\sigma}$) اثر کشش سطحی را در بارهای پایین نشان می‌دهد،

عدد فرود ($Fr = \frac{V}{\sqrt{gH_t}}$) وضعیت جریان (زیربحرانی یا فوق‌بحرانی) را مشخص می‌کند.

در این مطالعه، جریان در تمام آزمایش‌ها زیربحرانی ($Fr < 1$) و در حالت آشفته ($Re > 20,000$) بوده است؛ بنابراین، اثر عدد رینولدز نادیده

گرفته شد. همچنین، با توجه به اینکه آزمایش‌ها در محدوده دبی ۳/۲۵-۷۲/۶۲ لیتر بر ثانیه انجام شد، عدد وبر در دو بازه زیر قرار گرفت:

$We < 50$ در دبی‌های پایین ($H_t < 3$ cm)، کشش سطحی تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای دارد،

$We > 50$ در دبی‌های متوسط و بالا، اثر کشش سطحی ناچیز است (Gharahjeh & Aydin, 2024; Rezaei et al., 2025).

علاوه بر این، پارامترهای هندسی مانند $\frac{W_i}{W_o} = 1.0$ (در مستطیلی) و $\frac{L}{W} \approx 5/1$ (در دوزنقه‌ای)، $\frac{B}{W} = 0.258$ و $N = 4$ در تمام مدل‌ها

ثابت در نظر گرفته شدند تا تأثیر مستقل شیب دیواره جانبی و هندسه تاج بر ضریب دبی قابل‌ارزیابی باشد.

با حذف پارامترهای ثابت، رابطه نهایی ضریب دبی به‌صورت رابطه ۵ ساده می‌شود:

$$C_d = f\left(\frac{H_t}{P_i}, \frac{L'}{L}, \theta, We\right) \quad (5)$$

رابطه ۵ نشان می‌دهد که در مطالعه حاضر، ضریب دبی عمدتاً تحت تأثیر نسبت بار آبی به ارتفاع تاج، نسبت طول مرطوب به طول کل،

شیب دیواره جانبی و اثرات کشش سطحی (در دبی‌های پایین) است. این چهار پارامتر، ستون‌های اصلی تحلیل نتایج و توسعه رابطه تجربی در

این پژوهش هستند.

شایان ذکر است که رابطه ارائه شده در معادله (۵) بر اساس داده‌های حاصل از آزمایش‌های انجام شده بر روی مدل‌های مورد بررسی در این تحقیق استخراج شده است؛ از این رو دامنه اعتبار آن به محدوده پارامترهای هیدرولیکی و نسبت‌های هندسی به کاررفته در این آزمایش‌ها محدود می‌شود. بنابراین تعمیم این رابطه به شرایط هندسی یا دامنه‌های هیدرولیکی متفاوت، نیازمند انجام بررسی‌ها و آزمایش‌های تکمیلی خواهد بود.

تحلیل ابعادی نشان داد که ضریب دبی این سازه‌ها تابعی از پارامترهای بی‌بعدی شامل نسبت بار آبی به ارتفاع تاج (H/P_i)، نسبت طول مؤثر به طول کل تاج (L/L)، زاویه شیب دیواره جانبی (θ)، عدد وبر (We) و عدد فرود (Fr) است (Erpicum et al., 2017; Machiels et al., 2012; Gharahjeh & Aydin, 2024; Rezaei et al., 2025; Zhou et al., 2025). با توجه به جریان آرام و سرعت کم در محدوده دبی مورد مطالعه، عدد فرود همواره کمتر از یک بوده و جریان در حالت زیربحرانی قرار داشت. همچنین، اثر عدد رینولدز به دلیل غالب بودن جریان آشفته نادیده گرفته شد (Cicero et al., 2013). در این پژوهش، پارامترهای هندسی مانند B/W ، W_i/W_o و L/W (تعداد چرخه‌ها) ثابت در نظر گرفته شدند تا تأثیر مستقل شیب و هندسه بر عملکرد هیدرولیکی قابل ارزیابی باشد.

روش اندازه‌گیری طول مؤثر تاج سرریز

به منظور تعیین طول مؤثر تاج سرریز، پس از رسیدن جریان به شرایط پایدار، آزمایش برای مدت کوتاهی متوقف شد و ردپای جریان عبوری بر روی تاج سرریز ثبت گردید. طول مرطوب تاج سرریز بر اساس محدوده‌ای که توسط جریان پوشش داده شده بود اندازه‌گیری شد. برای کاهش اثر تغییرات سطح آب ناشی از توقف جریان، اندازه‌گیری‌ها با حداقل فاصله زمانی پس از قطع جریان انجام شد. لازم به ذکر است که در دبی‌های پایین، به دلیل کاهش وضوح مرز جریان، تعیین دقیق محدوده مرطوب با عدم قطعیت بیشتری همراه است که این موضوع به عنوان یکی از منابع خطای آزمایش در تحلیل عدم قطعیت در نظر گرفته شده است.

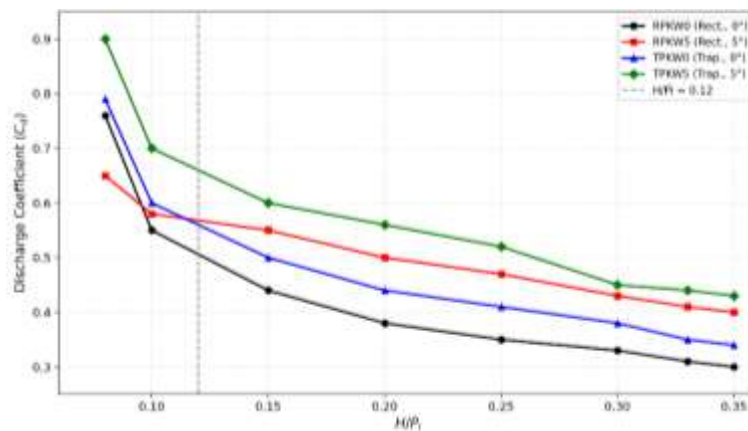
یافته‌ها

در این بخش، یافته‌های آزمایشگاهی حاصل از بررسی مدل‌های سرریز کلیدی با هندسه مستطیلی و دوزنقه‌ای، با و بدون شیب جانبی ۵ درجه، تحلیل و مقایسه می‌شوند. تمام نتایج در محدوده دبی حداقل و حداکثر اشاره شده و با پوشش مقادیر مختلف نسبت بار آبی به ارتفاع تاج (H/P) از ۰/۰۵ تا ۰/۴۰ گزارش شده‌اند.

در تحلیل جریان بر روی سرریزهای مدل، معمولاً فرض می‌شود که اثرات ویسکوزیته و کشش سطحی در مقیاس آزمایشگاهی ناچیز هستند. با این حال، باید توجه داشت که در برخی شرایط به‌ویژه در دبی‌های پایین، مقادیر عدد رینولدز و عدد وبر ممکن است به اندازه‌ای کاهش یابند که اثرات مقیاس تا حدودی بر رفتار جریان تأثیرگذار باشند. در آزمایش‌های انجام شده در این پژوهش، اگرچه در بخش قابل توجهی از محدوده دبی‌ها جریان در شرایط آشفته قرار دارد، اما در دبی‌های پایین نمی‌توان تأثیر احتمالی ویسکوزیته و کشش سطحی را به طور کامل نادیده گرفت. بنابراین این موضوع به عنوان یکی از محدودیت‌های ذاتی آزمایش‌های مدل فیزیکی در تفسیر نتایج مدنظر قرار گرفته است.

ضریب دبی

ضریب دبی (C_d) به عنوان یکی از مهم‌ترین شاخص‌های ارزیابی عملکرد هیدرولیکی سرریزها، در این پژوهش برای چهار مدل RPKW0، RPKW5 و TPKW0 محاسبه شد. شکل ۲ تغییرات ضریب دبی را بر حسب نسبت بار آبی به ارتفاع تاج (H/P) نشان می‌دهد.

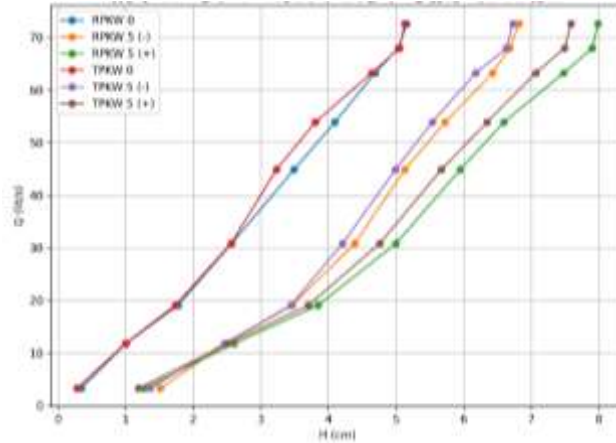


شکل ۲. تغییرات ضریب دبی (C_d) در مقابل هد نسبی (H/P_i) برای چهار مدل سرریز کلید پیانویی

نتایج نشان می‌دهد که در نسبت‌های پایین بار آبی ($H/P > 0/12$)، مدل‌های بدون شیب دارای مقادیر ضریب دبی بزرگ‌تری نسبت به مدل‌های شیب‌دار هستند. با افزایش نسبت H/P و عبور از مقدار حدود $0/12$ ، روند تغییرات معکوس شده و مدل‌های شیب‌دار عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهند.

در این محدوده، مدل RPKW5 نسبت به مدل RPKW0 حدود ۶٪ افزایش ضریب دبی و مدل TPKW5 نسبت به مدل TPKW0 به‌طور متوسط حدود ۷٪ افزایش ضریب دبی نشان می‌دهد. همچنین مقایسه دو مدل شیب‌دار نشان می‌دهد که مدل TPKW5 در تمام دامنه دبی‌های مورد مطالعه عملکرد بالاتری داشته و به‌طور متوسط حدود ۱۳٪ ضریب دبی بیشتری نسبت به مدل RPKW5 ارائه می‌دهد.

به منظور مقایسه عملکرد هیدرولیکی مدل‌ها، منحنی دبی-اشل ($Q-H$) برای هر چهار سرریز ترسیم شد (شکل ۳). همان‌گونه که مشاهده می‌شود، در یک هد ثابت، مدل‌های دوزنقه‌ای قادر به عبور دبی بیشتری نسبت به مدل مستطیلی هستند. این موضوع نشان می‌دهد که اگرچه ضریب دبی سرریزهای کلیدپیانویی به دلیل تداخل جریان‌ها معمولاً کمتر از سرریزهای خطی است، اما افزایش طول مؤثر تاج باعث افزایش ظرفیت عبور جریان در یک هد مشخص می‌شود.



شکل ۳. منحنی‌های دبی-اشل برای مدل‌های سرریز کلیدیابی نوع RPKW و TPKW.

با این حال، با توجه به عدم قطعیت‌های مرتبط با اندازه‌گیری پارامترهایی مانند دبی و هد، این اختلاف باید در چارچوب دقت آزمایشگاهی تفسیر شود. بنابراین، این تفاوت لزوماً بیانگر برتری قطعی یکی از مدل‌ها نیست و می‌تواند تا حدی تحت تأثیر خطای اندازه‌گیری و محدودیت‌های آزمایشگاهی قرار داشته باشد. از این رو، نتایج بیشتر بیانگر یک گرایش کلی در رفتار هیدرولیکی مدل‌ها بوده و برای دستیابی به نتیجه‌گیری قطعی‌تر، انجام آزمایش‌های تکمیلی توصیه می‌شود (Ahmadi et al., 2024; Rezaei et al., 2025; Zhou et al., 2025).

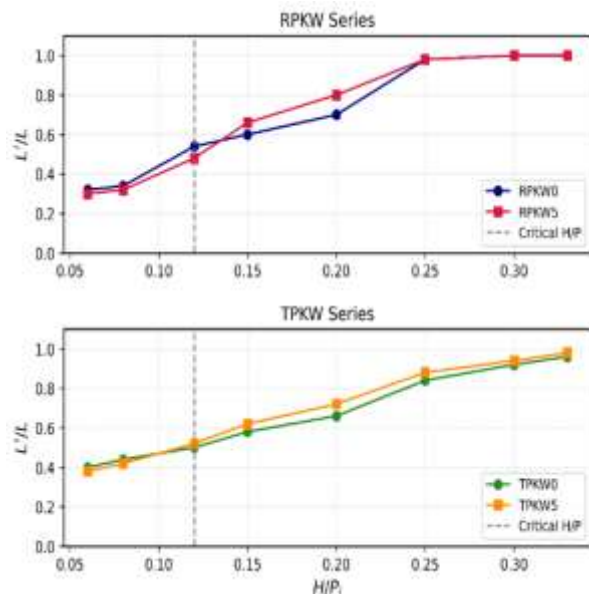
نتایج آماری مقایسه با مطالعات پیشین در جدول ۳ ارائه شده است. مقادیر RMSE برای مقایسه با مطالعات سهراب‌زاده و قدسیان (۲۰۲۱) و کومار و همکاران (۲۰۲۰) به ترتیب برابر با ۰/۲۵۰ و ۰/۲۷۶ به دست آمد.

جدول ۳. مقایسه آماری نتایج تحقیق حاضر با مطالعات پیشین

Bias	MAE	RMSE	تعداد داده‌ها	مطالعه مرجع
+0.227	0.227	0.250	9	سهراب‌زاده و قدسیان (۲۰۲۱)
+0.239	0.239	0.276	9	کومار و همکاران (۲۰۲۰)

طول مؤثر مرطوب

طول مؤثر مرطوب (L') به عنوان پارامتری پویا و وابسته به بار آبی، نقشی حیاتی در تبیین تفاوت‌های عملکردی بین مدل‌ها ایفا می‌کند. در این مطالعه، با اندازه‌گیری مستقیم طول مرطوب هر مدل پس از برقراری جریان پایدار، این پارامتر در تمام دامنه دبی‌ها محاسبه شد. **Error!** Reference source not found. تغییرات نسبت L'/L (نسبت طول مؤثر به طول کل تاج) را در تابع نسبت بار آبی (H/P_0) برای چهار مدل نشان می‌دهد.



شکل ۴. تغییرات نسبت طول مؤثر مرطوب (L'/L) در تابع نسبت بار آبی برای چهار مدل PKW

در شکل ۴ مشاهده می‌شود، در نسبت‌های پایین بار آبی ($H/P < 0.12$)، تنها بخش ورودی و دیواره‌های جانبی فعال هستند و اختلاف طول مؤثر بین مدل‌ها ناچیز است. با افزایش بار آبی به بالاتر از 0.12 ، کلیدهای خروجی به تدریج در مسیر جریان قرار گرفته و طول مؤثر افزایش می‌یابد. در این محدوده، مدل TPKW5 به طور متوسط 4% طول مؤثر بیشتری نسبت به RPKW5 دارد.

اندازه‌گیری‌های مستقیم پس از تثبیت جریان نشان داد که: در نسبت‌های H/P کمتر از 0.10 ، تنها بخش ورودی و دیواره‌های جانبی فعال هستند و طول مؤثر در هر چهار مدل تفاوت چندانی ندارد. با افزایش H/P به بالاتر از 0.12 ، کلیدهای خروجی به تدریج در مسیر جریان قرار گرفته و طول مؤثر افزایش می‌یابد.

با توجه به اینکه در تحلیل ابعادی ارائه شده، ضریب دبی تابعی از نسبت طول مؤثر به طول کل سرریز (L'/L) در نظر گرفته شده است، رابطه بین این پارامتر و ضریب دبی بررسی شد. با وجود این که افزایش نسبت L'/L معمولاً به عنوان عاملی برای افزایش ظرفیت عبور جریان در سرریزهای دنداندار مطرح می‌شود، نتایج حاضر نشان می‌دهد که برای مدل‌های TPKW 5+ و RPKW 5+ در محدوده‌ی هدفی مورد آزمایش، افزایش L'/L از حدود 0.3 تا 0.32 به 1 ، با کاهش تدریجی ضریب دبی همراه است. این رفتار می‌تواند به اثر ترکیبی تغییر شکل هندسی پلان، افزایش طول مسیر جریان و اتلاف‌های موضعی در نواحی اتصال شاخه‌ها نسبت داده شود؛ به گونه‌ای که بخش اضافی طول مؤثر به طور کامل در انتقال مؤثر دبی مشارکت نکرده و بخشی از آن صرف تلاطم و جدایی جریان می‌شود. بنابراین، رابطه‌ی بین G_d و L'/L در این مدل‌ها خطی نبوده و به هندسه‌ی جزئی و شرایط جریان وابسته است.

برای ارائه یک رابطه پیش‌بینی برای ضریب دبی، تحلیل رگرسیونی بر روی داده‌های آزمایشگاهی انجام شد. نتایج نشان داد که می‌توان G_d را به صورت مناسبی بر حسب پارامترهای بدون بعد هندسی و هیدرولیکی L'/L همبستگی داد. به دلیل سادگی و تفسیرپذیری فیزیکی، از مدل توانی به صورت تابعی از پارامترهای بدون بعد استفاده شد. برای سرریزهای PKW، یک فرم مناسب برای برازش تجربی با داده‌های آزمایشگاهی نمونه‌های RPKW 5 و TPKW 5+ به صورت رابطه ۶ است:

$$C_d = 0.448 \left(\frac{L}{L_r}\right)^{0.155} \quad \text{for TPKW 5+}$$

$$C_d = 0.878 \left(\frac{L}{L_r}\right)^{-0.643} \quad \text{for RPKW 5+}$$

رابطه (۶)

همچنین به منظور بررسی کیفی الگوی جریان روی تاج سرریزها، تصاویر آزمایشگاهی جریان برای چهار مدل مورد مطالعه در دبی ۴۰ لیتر بر ثانیه ثبت شد. شکل ۵ الگوی جریان روی مدل‌های RPKW0، TPKW0، RPKW5 و TPKW5 را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، توزیع جریان و نحوه ورود آب به کلیدهای ورودی و خروجی در مدل‌های مختلف متفاوت بوده و این تفاوت‌ها می‌تواند بر میزان طول مؤثر تاج و در نتیجه ضریب دبی تأثیرگذار باشد (Ahmadi et al., 2024; Kheir-Abadi et al., 2020; Sangsefidi et al., 2021; Zhou et al., 2025)



ب



الف



د



ج

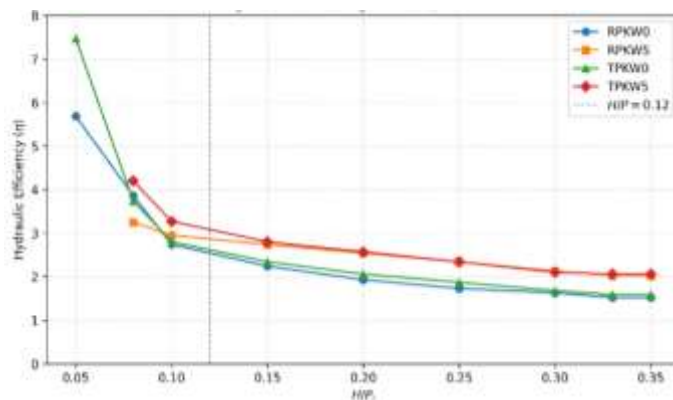
شکل ۵. تصاویر آزمایشگاهی الگوی جریان روی چهار مدل سرریز PKW در دبی ۴۰ لیتر بر ثانیه.

الف) RPKW0، ب) TPKW0، ج) RPKW5، د) TPKW5

شاخص عملکرد هیدرولیکی

در این پژوهش به منظور مقایسه عملکرد هیدرولیکی مدل‌های مختلف سرریز، از یک شاخص مقایسه‌ای با عنوان «شاخص عملکرد هیدرولیکی» استفاده شده است که به صورت حاصل ضرب ضریب دبی در نسبت طول مؤثر تاج سرریز به عرض کانال تعریف می‌شود. این شاخص به صورت زیر بیان می‌شود:

شاخص عملکرد هیدرولیکی (η) که با رابطه $\eta = C_d \times (L/W)$ تعریف می‌شود، معیاری جامع برای مقایسه سرریزها با عرض‌های یکسان اما طول‌های تاج متفاوت است (Epicum et al., 2017). **Error! Reference source not found.** تغییرات این پارامتر را برای چهار مدل مورد مطالعه نشان می‌دهد.



شکل ۶. تغییرات شاخص عملکرد هیدرولیکی در تابع نسبت بار آبی برای چهار مدل PKW

در شکل ۶ مشاهده می‌شود، مدل TPKW5 با وجود کوتاه‌تر بودن طول تاج ۴۵۳ سانتیمتر در مقابل ۴۹۳ سانتیمتر، شاخص عملکرد هیدرولیکی بالاتری نسبت به RPKW5 دارد.

در تمام مدل‌های این پژوهش، عرض کل سازه ($W = 97$ cm) ثابت بوده، اما طول کل تاج (L) در مدل‌های دوزنقه‌ای (~454 cm) کمتر از مدل‌های مستطیلی (~494 cm) است. با وجود کوتاه‌تر بودن طول تاج، مدل TPKW5 به دلیل ضریب دبی خیلی بالاتر، عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد؛ شاخص عملکرد TPKW5 به‌طور متوسط ۵٪ بیشتر از RPKW5 است، همچنین، شاخص عملکرد مدل‌های شیب‌دار در $H/P > 0.15$ با نرخ کمتری کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده پایداری بهتر آن‌ها در دبی‌های بالا است.

در مجموع، این مطالعه نه تنها ناهماهنگی‌های موجود در ادبیات (به‌ویژه درباره شیب) را با شناسایی محدوده بحرانی $H/P = 0.12$ روشن می‌کند، بلکه برای اولین بار اثر هم‌افزایی بین هندسه دوزنقه‌ای و شیب سراسری دیواره جانبی را کمی‌سازی نموده است که در منابع ۲۰۲۱ تا ۲۰۲۶ پوشش داده نشده بود (Parsaie, et al., 2021; Rezaei et al., 2025).

بحث

در این بخش، نتایج ارائه‌شده در قسمت یافته‌ها تفسیر می‌شوند تا مکانیسم‌های هیدرولیکی مؤثر بر تغییرات ضریب دبی، طول مؤثر مرطوب و شاخص عملکرد هیدرولیکی در چهار مدل RPKW0, RPKW5, TPKW0 و TPKW5 روشن شود. تمرکز اصلی بحث حاضر بر تبیین نقش (۱) هندسه دوزنقه‌ای، (۲) شیب جانبی ۵ درجه، و (۳) اثر متقابل این دو پارامتر (اثر هم‌افزایی) است. همچنین، نتایج با مطالعات پیشین مقایسه و محدودیت‌های ناشی از مقیاس آزمایشگاهی و عدم قطعیت اندازه‌گیری‌ها تشریح می‌شود.

تبیین رفتار ضریب دبی و نقش آستانه $H/P \approx 0.12$

یافته‌ها نشان داد که عملکرد مدل‌های شیب‌دار در نسبت بار آبی پایین ($H/P < 0.12$) در مقایسه با مدل‌های بدون شیب کاهش می‌یابد، اما با عبور از این آستانه، بهبود عملکرد حاصل می‌شود. این رفتار با «فعال شدن تدریجی طول مؤثر تاج» قابل توجیه است. در هدهای پایین، تمرکز

جریان بر بخش‌های ورودی باعث می‌شود که شیب جانبی مسیر جریان را به سمت داخل هدایت کرده و سهم طول مؤثر تاج را کاهش دهد. اما در هدهای بالاتر، شیب جانبی با یکنواخت‌سازی توزیع جریان و کاهش نواحی رکود (Dead zones)، مشارکت طول تاج را افزایش می‌دهد. این آستانه ($H/P \approx 0.12$) می‌تواند به‌عنوان یک «مرز گذار هیدرولیکی» در نظر گرفته شود که تناقض‌های موجود در مطالعات پیشین را تبیین می‌کند (Machiels et al., 2012; Ahmadi et al., 2024; Bagheri & Heidarpour, 2024; Rezaei et al., 2025; Leite-Ribeiro et al., 2009).

نقش هندسه دوزنقه‌ای در بهبود عملکرد

برتری مدل‌های دوزنقه‌ای در شاخص عملکرد هیدرولیکی حاکی از آن است که تغییر در زاویه دیواره‌ها، جدایش جریان را کاهش داده و باعث توزیع متقارن‌تر دبی در کلیدها می‌شود. در مورد اثر هم‌افزایی، نتایج نشان داد که ترکیب هندسه دوزنقه‌ای با شیب جانبی ۵ درجه، منجر به افزایش هم‌زمان طول مؤثر مرطوب و ضریب دبی شده است. با استناد به یافته‌های Zarei et al., 2021, Ahmadi et al., 2024; Bagheri & Heidarpour, 2024; Gharahjeh & Aydin, 2024 می‌توان استدلال کرد که طراحی فشرده در هندسه دوزنقه‌ای، فضای جانبی بیشتری برای گسترش جریان فراهم می‌کند. این مشاهده در چارچوب داده‌های حاضر به‌عنوان یک اثر هم‌افزایی احتمالی تفسیر می‌شود؛ هرچند تایید قطعی آن نیازمند مطالعات آماری گسترده‌تر در مقیاس‌های مختلف است.

از سوی دیگر، هندسه دوزنقه‌ای می‌تواند به یکنواخت‌تر شدن توزیع دبی بین کلیدهای ورودی/خروجی کمک کند. وقتی توزیع جریان یکنواخت‌تر باشد، احتمال تشدید «تداخل جریان» در برخی کلیدها کمتر شده و استفاده مؤثر از طول تاج افزایش می‌یابد. به همین دلیل مشاهده می‌شود که حتی در شرایطی که طول کل تاج در مدل‌های دوزنقه‌ای کمتر از مدل‌های مستطیلی است، شاخص عملکرد هیدرولیکی در مدل دوزنقه‌ای می‌تواند بالاتر باقی بماند.

اثر شیب جانبی

یافته‌ها نشان دادند که در محدوده‌ای که طول مؤثر تاج به‌صورت گسترده فعال می‌شود ($H/P > 0.12$)، اعمال شیب جانبی ۵ درجه سبب افزایش C_d (حدود ۶٪ در مدل مستطیلی و حدود ۷٪ در مدل دوزنقه‌ای) می‌شود. این افزایش را می‌توان ناشی از دو سازوکار اصلی دانست:

الف- **بهبود هدایت جریان و کاهش نواحی رکود:** شیب جانبی می‌تواند باعث هدایت تدریجی جریان و کاهش تمرکزهای موضعی سرعت/فشار شود. کاهش نواحی رکود در گوشه‌ها و بهبود الگوی جریان پیرامون کلیدها، اتلاف انرژی را کاهش می‌دهد.

ب- **افزایش مشارکت مؤثر تاج در عبور جریان:** وقتی هدایت افزایش می‌یابد و کلیدهای خروجی نیز درگیر می‌شوند، هر عاملی که باعث افزایش یکنواختی جریان و کاهش جدایش شود، به افزایش طول مرطوب مؤثر و در نهایت افزایش ضریب دبی کمک خواهد کرد.

با این حال، باید توجه داشت که اثر شیب به‌صورت یکسان در تمام هدها قابل انتظار نیست و همان‌طور که نتایج نشان دادند، در هدهای پایین می‌تواند اثر معکوس داشته باشد. بنابراین گزارش اثر شیب بدون اشاره به محدوده آزمایش شده می‌تواند منجر به تفسیرهای متناقض شود.

تحلیل اثر هم‌افزایی بین هندسه دوزنقه‌ای و شیب جانبی

همان‌گونه که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، در مدل‌های بدون شیب (TPKW0 و RPKW0) الگوی جریان نسبتاً متقارن بوده و حرکت آب در امتداد تاج بدون تشکیل گردابه‌های شدید انجام می‌شود. در مقابل، در مدل‌های دارای شیب جانبی، تغییر هندسه دیواره‌ها موجب هدایت جریان به سمت داخل کلیدها شده و توزیع جریان در طول تاج تغییر می‌کند. این رفتار در مدل TPKW5 به‌صورت گسترش یکنواخت‌تر جریان در طول تاج مشاهده می‌شود که می‌تواند یکی از عوامل افزایش طول مؤثر مرطوب و در نتیجه بهبود ضریب دبی در این مدل باشد.

مقایسه نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که مدل TPKW5 نسبت به RPKW5 به‌طور متوسط حدود ۱۳ درصد ضریب دبی بالاتری دارد، در حالی که طول مؤثر مرطوب در TPKW5 حدود ۴ درصد بیشتر گزارش شده است. هم‌زمانی افزایش طول مؤثر و بهبود ضریب دبی نشان می‌دهد که ترکیب هندسه دوزنقه‌ای با شیب جانبی صرفاً حاصل جمع دو اثر مستقل نیست، بلکه می‌تواند نوعی تقویت متقابل در رفتار هیدرولیکی ایجاد کند. به بیان دیگر، شیب جانبی زمانی کارا تر عمل می‌کند که هندسه امکان گسترش مناسب جریان و کاهش جدایش را فراهم کند، و در مقابل، هندسه دوزنقه‌ای نیز زمانی بیشترین بهره را خواهد داشت که توزیع جریان توسط شیب جانبی به‌صورت یکنواخت‌تری در طول تاج هدایت شود.

بر اساس نتایج به‌دست‌آمده، ترکیب هندسه دوزنقه‌ای با شیب جانبی ۵ درجه موجب افزایش هم‌زمان طول مؤثر مرطوب و ضریب دبی شده است. این رفتار می‌تواند به‌عنوان نشانه‌ای از یک اثر هم‌افزایی محتمل بین دو پارامتر هندسی تفسیر شود، هرچند تأیید قطعی این موضوع نیازمند انجام آزمایش‌های بیشتر، افزایش حجم داده‌ها و استفاده از تحلیل‌های آماری تکمیلی است.

تفسیر تغییرات طول مؤثر مرطوب و ارتباط آن با C_d

نتایج نشان دادند که در هدهای پایین اختلاف طول مؤثر مرطوب بین مدل‌ها ناچیز است، اما با افزایش هد (به‌ویژه پس از آستانه $H/P \approx 0.12$) (اختلاف‌ها آشکار می‌شود. افزایش طول مؤثر مرطوب در مدل TPKW5 نسبت به RPKW5 حدود ۴٪) به معنای آن است که بخش بزرگ‌تری از تاج واقعاً در تماس با جریان قرار گرفته و در فرآیند عبور جریان مشارکت داشته است. از منظر فیزیکی، وقتی طول مؤثر افزایش می‌یابد، «سطح مؤثر عبور» و ظرفیت تخلیه برای یک هد معین افزایش پیدا می‌کند و بنابراین انتظار می‌رود C_d نیز رشد کند؛ این دقیقاً همان الگویی است که در نتایج مشاهده شد.

بنابراین، می‌توان استدلال کرد که یکی از ریشه‌های اختلاف عملکرد بین مدل‌ها، نه صرفاً شکل هندسی، بلکه «میزان فعال‌سازی طول تاج» در شرایط مختلف هد است؛ موضوعی که در طراحی عملی PKWها اهمیت مستقیم دارد.

تبیین شاخص عملکرد هیدرولیکی

شاخص عملکرد هیدرولیکی $\eta = C_d \times (L/W)$ از این جهت ارزشمند است که صرفاً افزایش C_d را ملاک قرار نمی‌دهد، بلکه اثر طول تاج را نیز در نظر می‌گیرد. در این مطالعه، با وجود کوتاه‌تر بودن طول تاج در مدل‌های دوزنقه‌ای، مشاهده شد که TPKW5 به‌طور متوسط حدود ۵٪ شاخص عملکرد بالاتری نسبت به RPKW5 دارد. این نتیجه نشان می‌دهد که در طراحی‌های واقعی، ممکن است بتوان با یک هندسه فشرده‌تر (طول تاج کمتر) به عملکرد برابر یا حتی بهتر دست یافت؛ به‌ویژه در پروژه‌هایی که محدودیت فضا یا هزینه‌های سازه‌ای وجود دارد. از این منظر، برتری TPKW5 صرفاً یک بهبود هیدرولیکی نیست، بلکه می‌تواند یک مزیت اجرایی/فضایی نیز محسوب شود.

مقایسه یافته‌ها با مطالعات پیشین

نتایج به‌دست‌آمده در این پژوهش با یافته‌های محققان پیشین در زمینه بهینه‌سازی سرریزهای کلید پیانویی همخوانی دارد. برتری هیدرولیکی مدل‌های دوزنقه‌ای (TPKW) نسبت به مدل‌های مستطیلی (RPKW) که در این تحقیق مشاهده شد، با نتایج Crookston et al. (2021) که بر بهبود شرایط ورود جریان در کلیدهای ورودی دوزنقه‌ای تأکید داشتند، مطابقت دارد. همچنین، بهبود ضریب دبی بر اثر اعمال شیب در کف کلیدها، تأییدکننده مشاهدات Leite Ribeiro et al. (2009) است که نشان دادند شیب‌دار کردن کلیدها با کاهش نواحی رکود و جدایش جریان، کارایی سرریز را افزایش می‌دهد. با این حال، وجه تمایز و نوآوری مطالعه حاضر در این است که نشان می‌دهد اثر هم‌زمان این دو پارامتر (هندسه دوزنقه‌ای و شیب کلید) فراتر از مجموع اثرات مجزای آنهاست (Ercicum et al., 2017; Ahmadi et al., 2024; Rezaei et al., 2025; Zhou).

(et al., 2025). به عبارت دیگر، در حالی که مطالعات گذشته عمدتاً بر تأثیر مستقل هر پارامتر تمرکز داشتند، یافته‌های فعلی نشان‌دهنده یک تعامل هیدرولیکی (Interaction) مثبت بین فرم پلان و شیب طولی است که منجر به بهینه‌سازی توزیع جریان در طول تاج می‌شود. علاوه بر این، مقایسه با مطالعات منتخب (**Error! Reference source not found.**) نشان می‌دهد که نتیجه «برتری هندسه دوزنقه‌ای» با گزارش‌های متعدد هم‌راستا است. در مورد اثر شیب، اختلاف نتایج ادبیات قابل توجه است. نتایج حاضر نشان می‌دهد که این اختلاف می‌تواند ناشی از تفاوت در دامنه‌های آزمایش و میزان فعال شدن طول تاج باشد. اگر یک مطالعه عمدتاً روی هدهای پایین متمرکز باشد، احتمالاً شیب را کاهش می‌دهد. بنابراین، پژوهش حاضر می‌کند؛ در حالی که اگر هدهای متوسط/بالا سهم بیشتری از داده‌ها را تشکیل دهند، اثر شیب می‌تواند افزایشی ظاهر شود. بنابراین، پژوهش حاضر با معرفی آستانه $H/P \approx 0.12$ یک چارچوب تبیینی برای همگرایی این نتایج متناقض پیشنهاد می‌کند.

جدول ۴. مقایسه عملکرد هیدرولیکی سرریزهای کلیدی پانوی در مطالعات منتخب

پژوهش	هندسه	شیب (درجه)	دامنه H/P	تغییر ضریب دبی	تفاوت اصلی با پژوهش حاضر
Cicero et al. (2013)	دوزنقه‌ای	۰	۰/۴-۰/۱	+۱۸٪	بررسی صرف اثر هندسه
Kumar et al. (2020)	دوزنقه‌ای	۰	۰/۳-۰/۰۵	+۱۲٪	دامنه دبی محدود
Ahadiyan و Afzalian (2015)	مستطیلی	۵-۱۵	۰/۵-۰/۱	۸٪ تا -۳٪	کاهش عملکرد در اثر شیب
Sohrabzadeh- و Ghodsian Anzani (2023)	مستطیلی	۲۰	۰/۴-۰/۱۵	+۹٪	بررسی شیب تاج
Ghodsian و Sohrabzadeh (2022)	مثلثی	۱۲	۰/۲۵-۰/۱	+۷٪	هندسه مثلثی
Erpicum et al. (2017)	—	—	—	—	تأکید بر نیاز به مطالعات ترکیبی
پژوهش حاضر	دوزنقه‌ای	۵	۰/۴-۰/۰۵	+۱۳٪ نسبت به RPKW5	ترکیب هم‌زمان هندسه دوزنقه‌ای و شیب جانبی

تحلیل مقیاس‌پذیری و عدم قطعیت

طبق تحلیل‌های انجام شده، عدم قطعیت اندازه‌گیری ضریب دبی بین ۲ تا ۳ درصد برآورد شد. از آنجا که بهبود ۱۳ درصدی ضریب دبی در مدل TPKW5 نسبت به RPKW5 به مراتب بزرگ‌تر از بازه خطا است، این تغییرات از نظر آماری قابل اعتماد ارزیابی می‌شوند. با این حال، در هدهای بسیار پایین، اثرات کشش سطحی و ویسکوزیته (طبق معیارهای عدد وبر و رینولدز) می‌تواند نتایج را تحت تأثیر قرار دهد (Kumar et al., 2025; Rezaei et al., 2025; Khassaf et al., 2024; Gharahjeh & Aydin, 2024; al., 2020). بنابراین، نتایج این پژوهش در هدهای متوسط و بالا از قابلیت اطمینان بیشتری برای طراحی‌های مهندسی برخوردار است.

در نهایت، این پژوهش نشان داد که طراحی سرریزهای کلید-پانوی با تلفیق دو پارامتر هندسی (هندسه دوزنقه‌ای و شیب جانبی) می‌تواند پتانسیل هیدرولیکی سازه را به طور معناداری ارتقا دهد. برتری مشاهده شده در شاخص عملکرد هیدرولیکی مدل‌های دوزنقه‌ای شیب‌دار، نشان‌دهنده مزیت این مدل‌ها در پروژه‌هایی با محدودیت فضا است. با ارائه آستانه گذار $H/P \approx 0.12$ ، این مطالعه چارچوب جدیدی برای درک تضادهای هیدرولیکی ناشی از شیب جانبی در متون علمی فراهم می‌آورد. نتایج حاضر، ضمن رعایت احتیاط‌های مربوط به مقیاس آزمایشگاهی، مبنای عملی مناسبی برای بهینه‌سازی سرریزهای PKW در شرایط واقعی فراهم می‌سازد که با یافته‌های کلیدی در ادبیات موضوع همخوانی دارد.

اثرات مقیاس آزمایشگاهی (ویسکوزیته و کشش سطحی)

همان گونه که در محدودیت‌های آزمایش اشاره شد، در دبی‌های پایین ممکن است عدد رینولدز و عدد وبر کاهش یافته و اثرات ویسکوزیته و کشش سطحی بر رفتار جریان قابل ملاحظه شود. این موضوع می‌تواند باعث شود نتایج مربوط به H/P های بسیار کوچک با عدم قطعیت بیشتری همراه باشند. از این رو، تفسیر رفتار مدل‌ها در هدهای پایین باید با احتیاط انجام شود و تعمیم مستقیم آن به مقیاس واقعی نیازمند در نظر گرفتن معیارهای تشابه دینامیکی است. با این وجود، در بخش قابل توجهی از دامنه آزمایش‌ها جریان در رژیم آشفته قرار داشته و نتایج در هدهای متوسط و بالا از اعتبار بیشتری برای کاربردهای طراحی برخوردارند.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش اثر هم‌زمان هندسه پلان و شیب جانبی بر عملکرد هیدرولیکی سرریز کلید پیانویی در یک فلوم آزمایشگاهی بررسی شد. چهار مدل شامل دو هندسه مستطیلی (RPKW) و دوزنقه‌ای (TPKW) در دو حالت بدون شیب و با شیب جانبی ۵ درجه مورد آزمایش قرار گرفتند. بر اساس نتایج به دست آمده، مهم‌ترین یافته‌های این مطالعه به شرح زیر است:

الف- نتایج آزمایش‌ها نشان داد که هندسه دوزنقه‌ای در مقایسه با هندسه مستطیلی عملکرد هیدرولیکی بهتری داشته و در شرایط مشابه، ضریب دبی در مدل‌های TPKW بزرگ‌تر از مدل‌های RPKW بوده است.

ب- اعمال شیب جانبی موجب تغییر الگوی توزیع جریان در کلیدها شده و در برخی شرایط باعث بهبود انتقال جریان در طول تاج گردید. تصاویر الگوی جریان نشان داد که در مدل‌های شیب‌دار، هدایت جریان به سمت داخل کلیدها افزایش یافته و توزیع جریان یکنواخت‌تر می‌شود.

ج- مقایسه مدل‌ها نشان داد که مدل TPKW5 نسبت به RPKW5 به‌طور متوسط حدود ۱۳ درصد ضریب دبی بالاتری دارد، در حالی که طول مؤثر مرطوب در این مدل حدود ۴ درصد بیشتر اندازه‌گیری شد. این نتایج نشان می‌دهد که افزایش طول مؤثر تاج می‌تواند نقش مهمی در بهبود ظرفیت عبوری سرریز داشته باشد.

د- نتایج حاصل بیانگر آن است که ترکیب هندسه دوزنقه‌ای با شیب جانبی می‌تواند به ایجاد یک اثر هم‌افزایی در عملکرد هیدرولیکی سرریز منجر شود؛ به گونه‌ای که بهبود توزیع جریان در طول تاج و کاهش نواحی جدایش جریان موجب افزایش ضریب دبی می‌شود.

ه- با توجه به محدود بودن تعداد مدل‌ها و شرایط آزمایشگاهی، پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آینده اثر زوایای مختلف شیب، نسبت‌های هندسی متفاوت و دامنه وسیع‌تری از شرایط هیدرولیکی مورد بررسی قرار گیرد تا امکان تعمیم نتایج به مقیاس‌های بزرگ‌تر فراهم شود.

مراجع:

1. Afzalian, A.R., & Ahadiyan, J. (2015). Piano key weir with sloped parapet wall. *Irrigation Sciences and Engineering*, 38(2), 91-102.
2. Ahadiyan, J., Afzalian, A. (2016). 'Effect of Piers Geometric on the Hydraulic Properties of Piano Key Weirs', *Journal of Water and Soil Conservation*, 23(2), pp. 267-277. doi: 10.22069/jwfst.2016.3068
3. Ahmadi, M., Dehghani, A. A., & Safari, M. J. S. (2024) Experimental Investigation of Piano Key Weirs with Inclined Crests: Effects on Discharge Capacity and Flow Characteristics ISH. *Journal of Hydraulic Engineering*, 30(3), 1-14. DOI: 10.1080/09715010.2024.2302808

4. Bagheri, S., & Heidarpour, M. (2024) Impact of Weber number on scaled PKW models: A laboratory study. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 153, 111023. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2023.111023
5. Cicero, G. M., Delisle, J. R., Lefebvre, V., & Vermeulen, J. (2013). Experimental and numerical study of the hydraulic performance of a trapezoidal Piano Key weir. *Labyrinth and piano key weirs II*, 265.
6. Crookston, B. M., Tullis, B. P., & Anderson, R. M. (2021) Piano key weir hydraulics: A global perspective on design advances *Journal of Hydraulic Research*, 59(5), 675–691. DOI: 10.1080/00221686.2021.1887389
7. Erpicum, S., Archambeau, P., Dewals, B., & Piroton, M. (2017). Hydraulics of piano key weirs: a review. *Labyrinth and Piano Key Weirs III*, 27-36.
8. Gharahjeh, S., & Aydin, I. (2024) Performance evaluation of PKWs with asymmetric inlet/outlet widths *Environmental Fluid Mechanics*, 24(2), 487–505. DOI: 10.1007/s10652-023-09964-3
9. Ghodsian, M., & Sohrabzadeh-Anzani, H. (2023). Experimental study on flow over rectangular piano key weirs with slopped side crests. *Modares Civil Engineering Journal*, 23(2), 167–175.
10. Kabiri-Samani, A., Javaheri, A., & Borghei, S. M. (2021) Hydraulic performance of trapezoidal piano key weirs with rounded crest edges. *Flow Measurement and Instrumentation*, 81, 101970. DOI: 10.1016/j.flowmeasinst.2021.101970
11. Khassaf, S. I., Alabedi, H. J., & Al-Maliki, A. (2024) Geometric optimization of trapezoidal piano key weirs using CFD and AI. *Water Resources Management*, 38(4), 1563–1580. DOI: 10.1007/s11269-024-03725-1
12. Kheir-Abadi, M. A., Moghadam, M. K., Sabzevari, T., & Ghadampour, Z. (2020). An experimental study of the effects of the parapet walls geometry on the discharge coefficient of trapezoidal piano key weirs. *Flow Measurement and Instrumentation*, 73, 101742.
13. Kumar, M., Sihag, P., Tiwari, N. K., & Ranjan, S. (2020). Experimental study and modelling discharge coefficient of trapezoidal and rectangular piano key weirs. *Applied Water Science*, 10(1), 43.
14. Leite Ribeiro, M., Boillat, J.-L., Schleiss, A. J., & Laugier, F. (2009). Hydraulic capacity of piano key weirs. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(5), 448–456.
15. Machiels, O. (2012). Experimental study of the hydraulic behaviour of piano key weirs. PhD Thesis, University of Liège.
16. Mansouri, K., Ahadian, J. (2016). Blockage of Piano Key Weirs in Debris Flow with Individual Experiments. *Irrigation Sciences and Engineering*, 39(3), pp. 163-172. doi: 10.22055/jise.2016.12352

17. Parsaie, A., Dehghani, A. A., & Yasi, M. (2021) Predicting discharge coefficient of piano key weirs using machine learning models. *Water*, 13(1), 83. DOI: 10.3390/w13010083
18. Rezaei, M., Heidari, M., & Valipour, M. (2025) Machine learning-based prediction of PKW efficiency under varying crest slopes. *Journal of Hydrology*, 631, 131025. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2024.131025
19. Sajadi, S. M., Ahadiyan, J., Qanavati, M. (2017). Effect of baffled outlet keys at Piano Key Weir on dissipating energy. *Irrigation and Drainage Structures Engineering Research*, 18(69), pp. 77-92. doi: 10.22092/aridse.2017.108456.1165
20. Sangsefidi, Y., Tavakol-Davani, H., Ghodsian, M., Mehraein, M., & Zarei, R. (2021). Hydrodynamics and free-flow characteristics of piano key weirs with different plan shapes. *Water*, 13(15), 2108.
21. Shaker, M., Yusuf, B., Khassaf, S., Mohamed, B., & Alias, N. A. (2023). Novel techniques to study the effect of parapet wall geometry on the performance of piano key weirs. *Water*, 15(13), 2307.
22. Sohrabzadeh, H., & Ghodsian, M. (2022). Experimental study of the effect of sidewall slope over the triangular PK weir. *Journal of Hydraulics*, 17(4), 17-30.
23. Yarmohammadi, B., Ahadian, J. (2016). Experimental Study of Flow Hydraulic in Piano Key Weirs at Different Parapet Wall. *Irrigation Sciences and Engineering*, 39(4), pp. 47-58. doi: 10.22055/jise.2016.12495.
24. Zhou, Y., Chen, Q., & Zhang, J. (2025) Hydraulic efficiency of multi-cycle PKWs with inclined sidewalls. *Water Science and Technology: Water Supply*, 25(1), ws2025001. DOI: 10.2166/ws.2025.001.