



Management of Saltwater Intrusion in Sloping Coastal Aquifers Using the Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Numerical Method

Zahra Baazm¹ | Abolfazl Akbarpour² | Mostafa Yaghoubzadeh³ | Seyed Saeed Eslamian⁴ | Hossein Khozaymehnezhad⁵

1. Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, University of Birjand, Birjand, Iran. Email:

z.baazm@birjand.ac.ir

2. Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran. Email:

akbarpour@birjand.ac.ir

3. Department of Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, University of Birjand, Birjand, Iran. Email:

m.yaghoobzadeh@birjand.ac.ir

4. Department of Water Science and Engineering, College of Agriculture, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran,

Email: saeid@iut.ac.ir

5. Department of Water Science and Engineering, Faculty of Agriculture, University of Birjand, Birjand, Email:

iran.hkhozaymeh@birjand.ac.ir

Article Info

Article type: Research Article

Article history:

Received: Sep. 9, 2025

Revised: Oct. 25, 2025

Accepted: Nov. 29, 2025

Published online: Jan. 2026

Keywords:

Coastal aquifer,

Cutoff wall,

Mesh-free local Petrov-Galerkin

method,

Sloping,

Saltwater intrusion.

ABSTRACT

Coastal fresh groundwater management is a challenging research topic due to the importance of this resource and the significant risks arising from global changes and population growth. Rising sea levels and declining groundwater tables alter the hydraulic gradient and cause the expansion of the saltwater front in coastal aquifers. Moreover, the geometric configuration and morphology of coastal aquifers play a controlling role in saltwater intrusion. In this study, the management of saltwater intrusion in a sloping coastal aquifer using an impermeable cutoff wall was investigated numerically through the Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) method. Three aquifer bed slope models—including seaward slope (coastal slope, SS), horizontal bed (H), and landward slope (landside slope, LS)—were simulated for different scenarios (no cutoff wall, and cutoff walls with depths of 0.15, 0.30, 0.45, and 0.60 m). The results were compared with previous studies. The findings showed that the geometric shape of the aquifer can affect the extent of saltwater intrusion. Specifically, the advancement of the saltwater front in the seaward and landward sloping aquifers, compared to the horizontal case without a cutoff wall, decreased by 5% and increased by 10%, respectively. In all models, the saltwater intrusion for the 0.60 m wall scenario was 0.50 m, representing the least penetration. Therefore, this scenario can be considered the optimal and most effective wall depth for all cases. To evaluate the accuracy of the MLPG numerical model, the simulation results were compared with the Henry problem and the study by Abd-Elaty & Polemio (2023), and assessed using the RMSE, R^2 , and NSE indices. The results showed that RMSE values in all scenarios were less than 0.06, and R^2 values exceeded 0.95, indicating excellent agreement between the model and reference data. Model performance, based on the Nash–Sutcliffe Efficiency (NSE) index, was above 0.9 in all cases, confirming the high accuracy and stability of the model in predicting the distribution of the saltwater front.

Cite this article: Baazm, Z., Akbarpour, A., Yaghoubzadeh, M., Eslamian, S. S., Khozaymehnezhad, H., (2026) Management of Saltwater Intrusion in Sloping Coastal Aquifers Using the Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) Numerical Method, *Iranian Journal of Soil and Water Research*, 56 (11), 3197-3215. <https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402060.670004>

© The Author(s).

Publisher: University of Tehran Press.



DOI: <https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402060.670004>

EXTENDED ABSTRACT

Introduction

Coastal aquifers are vital sources of freshwater for densely populated coastal regions. Under natural conditions, groundwater flows from inland areas toward the sea. However, excessive groundwater extraction can reverse the hydraulic gradient, allowing seawater to intrude into aquifers and degrade water quality. Climate change, sea-level rise, and reduced aquifer recharge further intensify this process, increasing the risk of groundwater salinization. Given that nearly 70% of the world's population lives in coastal zones, managing seawater intrusion has become a major environmental and economic challenge. Among various management solutions, subsurface cutoff walls have been recognized as one of the most effective techniques to control the advancement of the saline front. The present study investigates the influence of aquifer bed slope geometry and cutoff wall depth on the extent of saltwater intrusion using the Meshless Local Petrov–Galerkin (MLPG) numerical method.

Method

In this research, the MLPG numerical model was developed to simulate seawater intrusion in a coastal aquifer. This mesh-free approach eliminates the need for complex grid generation and provides higher accuracy in solving partial differential equations compared to finite element and finite difference methods. Modeling was performed in MATLAB using a computational grid of 231 nodes with a uniform spacing of 0.1 m in both directions. Three aquifer slope geometries were considered: seaward slope (SS), horizontal bed (H), and landward slope (LS). Each geometry was simulated under four cutoff wall depths (0.15, 0.30, 0.45, and 0.60 m) and one scenario without a wall. Model parameters were based on the Henry problem, and the model's accuracy was validated against the study by Abd-Elaty & Polemio (2023). The statistical indicators RMSE, R^2 , and NSE were used to evaluate the model's precision and performance.

Results

The findings revealed that increasing the cutoff wall depth significantly reduces seawater intrusion. In the horizontal (H) model, increasing wall depth from 0.15 m to 0.60 m reduced intrusion from 0.93 m to 0.50 m—a 50% reduction. In the landward slope (LS) model, the intrusion decreased from 1.05 m to 0.50 m (52.4%), and in the seaward slope (SS) model, it decreased from 0.90 m to 0.50 m (45%). The LS condition showed the highest saltwater advancement, while the SS condition showed the least. In all models, the 0.60 m cutoff wall depth consistently produced the minimum intrusion (0.50 m) and can therefore be identified as the optimal depth. Statistical validation confirmed the high accuracy of the MLPG model: $RMSE < 0.06$, $R^2 > 0.95$, and $NSE > 0.9$ in all scenarios, indicating excellent agreement with benchmark data. Sensitivity analysis showed that a $\pm 20\%$ change in hydraulic conductivity (K) caused a 6–9% variation in the position of the saline front, highlighting the importance of accurately defining hydraulic properties in simulation models.

Conclusions

This study demonstrates that aquifer bed geometry and cutoff wall depth have a significant impact on seawater intrusion in coastal aquifers. A landward slope increases intrusion by about 10%, while a seaward slope reduces it by about 5%, compared to the horizontal case. The 0.60 m cutoff wall depth was found to be the most effective and optimal configuration across all scenarios. The high accuracy and numerical stability of the MLPG method confirm its potential as a reliable and efficient tool for modeling and managing coastal groundwater systems.

Author Contributions

Conceptualization A. Akbarpour and Z. Baazm; methodology, A. Akbarpour; software, Z. Baazm and A. Akbarpour; validation S. S. Islamian and H. Khozaimenejad; formal analysis, A. Akbarpour and Z. Baazm; investigation, M. Yaqubzadeh and H. Khozaimenejad.; resources, Z. Baazm; data curation Z. Baazm, A. Akbarpour and M. Yaqubzadeh.; writing-original draft preparation, Z. Baazm; writing-review and editing, Z. Baazm, A. Akbarpour, M. Yaqubzadeh and H. Khozaimenejad.; visualization, Z. Baazm and M. Yaqubzadeh; supervision, Z. Baazm and A. Akbarpour.; project management A. Akbarpour and M. Yaqubzadeh; funding acquisition, Z. Baazm and A. Akbarpour. All authors have read and agreed to the published version of the manuscript.

Data Availability Statement

Data available on request from the authors.

Ethical considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, plagiarism, and misconduct.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

مدیریت پیشروی آب شور در آبخوان‌های ساحلی شیب‌دار با استفاده از دیواره آب‌بند به روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین (MLPG)

زهرا باعزم^۱ | ابوالفضل اکبرپور^۲ | مصطفی یعقوب زاده^۳ | سید سعید اسلامیان^۴ | حسین خزیمه نژاد^۵

۱. گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. z.baazm@birjand.ac.ir

۲. گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. akbarpour@birjand.ac.ir

۳. گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. m.yaghoobzadeh@birjand.ac.ir

۴. گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران. saeid@iut.ac.ir

۵. گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران. hkhozeymeh@birjand.ac.ir

اطلاعات مقاله

چکیده

نوع مقاله: مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۶/۱۸

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۴/۸/۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۹/۸

تاریخ انتشار: بهمن ۱۴۰۴

واژه‌های کلیدی:

آبخوان ساحلی،

دیواره آب‌بند،

روش بدون شبکه پتروو-گالرکین،

شیب‌دار،

نفوذ آب شور.

مدیریت آب‌زیرزمینی شیرین ساحلی به دلیل اهمیت این منبع و خطرات عظیم ناشی از تغییرات جهانی و افزایش جمعیت، یک موضوع تحقیقاتی چالش‌برانگیز است. افزایش تراز آب دریا و کاهش تراز آب زیرزمینی، گردادیان هیدرولیکی را تغییر داده و موجب گسترش جبهه آب شور در آبخوان ساحلی می‌شود. همچنین پیکربندی هندسی و مورفولوژی آبخوان ساحلی سفره‌های آب ساحلی نقش کنترلی در نفوذ آب شور را ایفا می‌کنند. در این مطالعه به بررسی مدیریت پیشروی آب شور در آبخوان ساحلی شیب‌دار با استفاده از دیواره آب‌بند به روش عددی بدون شبکه پتروو-گالرکین (MLPG) پرداخته شده است. در اینجا سه مدل شیب بستر آبخوان شامل شیب به سمت دریا (شیب ساحلی: SS، بستر افقی (H) و شیب به سمت خشکی (شیب کنار دریا: LS برای سناریوهای (بدون دیوار آب‌بند و دیواره به عمق‌های ۰/۱۵، ۰/۳، ۰/۴۵ و ۰/۶ متر) مدل‌سازی شده و نتایج با مطالعات گذشته مقایسه گشته است. نتایج نشان داده است که شکل هندسی آبخوان می‌تواند بر میزان پیشروی آب شور در آبخوان ساحلی نقش داشته باشد به طوری که میزان پیشرفت آب شور در آبخوان ساحلی در حالت شیب به سمت ساحل و شیب به سمت خشکی نسبت به حالت افقی بدون دیواره به ترتیب ۵ درصد کاهش و ۱۰ درصد افزایش داشته است. در تمامی مدل‌ها پیشروی آب شور در سناریو دیواره ۰/۶ متر برابر ۰/۵ متر بوده و کم‌ترین نفوذ را داشته است لذا می‌توان از این سناریو به عنوان عمق بهینه و کارا در تمامی مدل‌ها نام برد. برای ارزیابی دقت مدل عددی MLPG، نتایج شبیه‌سازی با داده‌های مسئله هنری و مطالعه Abd-Elaty & Polemio (2023) مقایسه و با شاخص‌های RMSE، R^2 و NSE ارزیابی شد. نتایج نشان داد مقدار RMSE در تمام سناریوها کمتر از ۰/۰۶ و R^2 بالاتر از ۰/۹۵ است که نشان‌دهنده انطباق بسیار بالا میان مدل و داده‌های مرجع می‌باشد. کارایی مدل بر اساس شاخص Nash-Sutcliffe نیز در تمام حالت‌ها بیش از ۰/۹ گزارش شد که تأییدکننده عملکرد دقیق و پایدار مدل در پیش‌بینی توزیع جبهه آب شور است.

استناد: باعزم؛ زهرا، اکبرپور؛ ابوالفضل، یعقوب زاده؛ مصطفی، اسلامیان؛ سیدسعید، خزیمه نژاد؛ حسین، (۱۴۰۴) مدیریت پیشروی آب شور در آبخوان‌های ساحلی شیب‌دار با استفاده از دیواره آب‌بند به روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین (MLPG)، *مجله تحقیقات آب و خاک ایران*، ۵۶ (۱۱)، ۳۱۹۷-۳۲۱۵.



<https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402060.670004>

© نویسنده‌گان.

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.

DOI: <https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402060.670004>

مقدمه

در آبخوان‌های ساحلی تحت شرایط معمول و طبیعی آب زیرزمینی به درون اقیانوس یا دریا تخلیه می‌گردد که با افزایش برداشت آب زیرزمینی در این مناطق، جریان آب زیرزمینی به سمت دریا، کاهش و یا حتی معکوس می‌گردد این مسئله باعث ورود و نفوذ آب شور دریا به آبخوان‌های ساحلی و آلوده شدن آن‌ها می‌گردد (عطایی آشتیانی و همکاران، ۱۳۸۵). تأثیر تغییرات آب و هوایی بر دسترسی به منبع آب باکیفیت بالا، امروزه به‌طور گسترده در سراسر جهان شناخته شده است (McDonald et al., 2011). به‌طور خاص، بررسی، مدیریت و کاهش نفوذ آب شور تحت تأثیر کمبود آب و تغییرات آب و هوایی در مناطق ساحلی کلید حل مسائل زیست‌محیطی، اقتصادی و اجتماعی متعددی است (Abd-Elaty et al., 2019; Polemio and Zuffiano, 2020). حدود ۷۰ درصد از جمعیت جهان در مناطق ساحلی زندگی می‌کنند که تراکم جمعیت در آن‌ها بسیار بالاست. این درصد نشان‌دهنده یک‌روند رو به رشد گسترده است که باعث افزایش تقاضا برای آب شیرین در این مناطق می‌شود (McDonald et al., 2011; Wada et al., 2016; Abd-Elaty et al., 2021).

افزایش تقاضا برای آب شیرین و تغییرات آب و هوایی، آب‌زیرزمینی ساحلی را در معرض خطرات فزاینده شور شدن ناشی از نفوذ آب شور، به‌ویژه در مناطق کم آب، قرار می‌دهد (Polemio and Zuffiano, 2020). این وضعیت می‌تواند به دلیل فعالیت‌های انسانی و فرآیندهای طبیعی، مانند کاهش تغذیه آب‌زیرزمینی، برداشت بی‌رویه، اثرات جزر و مدی، امواج اقیانوسی و لرزه‌ای، اثرات پراکندگی و تغییرات آب و هوایی، از جمله افزایش سطح دریا بحرانی‌تر شود (Bear et al. 1999; El Shinawi et al., 2022).

حدود ۹۵٪ از مناطق ساحلی جهان تا سال ۲۱۰۰ به‌شدت تحت تأثیر افزایش سطح دریا قرار خواهند گرفت که این امر خطر سیل و نفوذ آب شور را افزایش می‌دهد (Shinawi et al., 2022). انتظار می‌رود افزایش میانگین سطح آب دریاهای جهانی ادامه یابد. جدیدترین ارزیابی در این زمینه، افزایش ۰/۲۸ تا ۰/۵۵ سانتی‌متری تا سال ۲۱۰۰ را نشان می‌دهد (IPCC, 2021). درحالی‌که این میزان در سال ۲۰۰۷ توسط هیئت بین‌دولتی تغییرات آب‌وهوایی (IPCC) بین ۱۸ تا ۵۸ سانتی‌متر تخمین زده شده بود (IPCC, 2007) و نرخ افزایش بین ۸ تا ۱۶ میلی‌متر در سال از سال ۲۰۸۱ تا ۲۱۰۰ پیش‌بینی کرده است (IPCC, 2014).

مطالعات گذشته نشان می‌دهد تکنیک‌های مختلفی در مطالعات گذشته از جمله روش‌های سد فیزیکی زیرسطحی (دیوارهای آب‌بند و سدهای زیرسطحی)، روش‌های سد هیدرولیکی از تزریق توسط چاه‌ها یا نفوذ توسط حوضچه‌های آب شیرین باکیفیت پایین یا برداشت آب شور برای تخلیه ایمن آب‌زیرزمینی شیرین با کیفیت بالا و همچنین از شمع‌بندی و خاک‌ریزی برای مدیریت نفوذ آب شور در آبخوان ساحلی توسعه و به کار گرفته شده‌اند (Polemio and Zuffiano, 2020; Abd-Elaty et al., 2019; Bear, 1999; Roger, 2010).

در بسیاری از مطالعات صورت گرفته به دلیل پیچیدگی ویژگی‌های کمی و کیفی آبخوان ساحلی جهت بررسی و تحلیل از مدل‌های شبیه‌ساز جریان آب زیرزمینی استفاده شده است. استفاده از مدل‌سازی عددی که از طراحی و انتخاب معیارهای مدیریتی پشتیبانی می‌کند، انتخابی قابل‌اعتماد در مورد آب‌زیرزمینی در معرض خطر شوری است. مدل‌سازی می‌تواند اثرات یک سناریوی بهره‌برداری خاص را ارزیابی کند و مدیران را به سمت انتخاب سناریوی بهینه هدایت کند (Singh 2012). مطالعات گذشته نشان داد است تاکنون ده‌ها تجربه مدل‌سازی مرتبط با استفاده از مدل تفاضل محدود و اجزای محدود انجام شده است (Polemio and Zuffiano, 2020; Zheng and Wang, 1999; Harbaugh, et al., 2000). مدل شبیه‌سازی عددی دارای قابلیت اجرای ساده، آسان، با دقت و کارایی بالا در محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار MATLAB برای شبیه‌سازی آبخوان‌های ساحلی در این مطالعه تهیه و مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مطالعه، روش عددی بدو شبکه محلی پترو-گالرکین^۱ برای تحلیل مسئله نفوذ آب دریا پیشنهاد می‌شود. روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین (MLPG) قبلاً برای مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی و انتقال املاح استفاده شده است. به دلیل مزایای آن نسبت به روش‌های عددی اجزای محدود (FEM)^۲ و تفاضل محدود (FDM)^۳ این روش در این مطالعه توسعه داده می‌شود. در این مطالعه به بررسی اثر شیب کف بستر ساحل بر پیشروی آب شور باوجود دیوار آب‌بند پرداخته شده است.

پیشینه پژوهش

لذا با توجه به اهمیت موضوع محققان زیادی مسئله پیشروی آب شور در آب شیرین را مورد بحث قرار دادند که در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌گردد.

1 Meshless Methods Petro-Galerkin (MLPG)

2 Finite Element Method (FEM)

3 Finite Difference Method (FDM)

Li et al., (۱۹۹۹)، مدلی تحلیلی را برای تخلیه آب زیرزمینی به دریا و تعیین میزان مواد شیمیایی همراه آن معرفی کردند. آن‌ها با استفاده از اطلاعات و داده‌های میدانی، نتایج مدل تحلیلی خود را با مشاهدات مقایسه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد ۹۲ درصد از میزان کل آب زیرزمینی تخلیه شده به دریا در اثر جزر و مد است که نتایج آن‌ها با مطالعه Moore (۱۹۹۶)، همخوانی داشت.

Mazzia, and Putti (۲۰۰۲)، دو نوع فرمول‌بندی بر اساس متغیرهای وابسته، یعنی بار هیدرولیک (غلظت و فشار) در آبخوان‌های ساحلی را مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه دست یافتند که فرمول‌بندی دوم دارای دقت بیشتری به خصوص در شبیه‌سازی‌های طولانی مدت هست.

Allow (۲۰۱۲)، از یک مدل تفاضل محدود سه‌بعدی برای نمایش نفوذ آب دریا توسط کد عددی SEAWAT نرم‌افزار ویژال مادفلو^۱ که برای محیط‌هایی با چگالی متفاوت است، استفاده کردند. نتایج او نشان داده است که دیوار آب‌بند در مقایسه با روش چاه تزریقی هزینه اولیه آن بالا است، اما هزینه تعمیر و نگهداری آن ناچیز است، لذا می‌تواند به عنوان روشی کارا و اقتصادی مورد استفاده قرار گیرد.

Armanuos et al., (۲۰۲۰)، تأثیر استفاده از یک مانع برای کنترل نفوذ آب دریا در یک آبخوان آزاد شیب‌دار را با استفاده از کد SEAWAT بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داده است که با افزایش عمق مانع نسبت دافعه آب دریا افزایش می‌یابد.

Sun et al., (۲۰۲۱)، مکان بهینه دیواره‌های آب‌بند برای جلوگیری از نفوذ آب دریا به آبخوان ساحلی را با استفاده از روش شبیه‌سازی - بهینه‌سازی مبتنی بر کریجینگ ارزیابی کردند. نتایج آن‌ها نشان داده است که میزان شوری در منبع مورد آزمایش کاهش پیدا کرده است. همچنین آن‌ها معتقدند این روش یک روش پایدار و قابل اعتماد برای انتخاب محل دیواره‌های آب‌بند برای پروژه‌های آبی جهت جلوگیری و کنترل نفوذ آب دریا می‌باشد.

Yang et al., (۲۰۲۱)، توانایی دیواره‌های آب‌بند برای افزایش آب شیرین در جزایر ساحلی را نشان داده‌اند که ارتباط زیادی با مدیریت منبع آب شیرین در جزایر که خطر طغیان اقیانوس در آن‌ها خطر جدی است، دارد.

محمد et al., (۲۰۲۳)، از رویکردهای یکپارچه مختلفی از جمله بررسی ژئوفیزیکی، تحقیقات میدانی، حفاری چاه، چاه‌نگاری، آزمایش‌های پمپاژ و نمونه‌برداری آب برای انجام تجزیه و تحلیل دقیق ویژگی‌های هیدروژئولوژیکی و هیدروشیمیایی یک آبخوان ساحلی در منطقه وست پورت سعید، شمال شرقی مصر، جهت ارزیابی مناسب بودن نمک‌زدایی از آبخوان استفاده کردند. در نهایت، آن‌ها مناسب‌ترین رویکرد را برای نمک‌زدایی کشف کردند.

Omajene et al., (۲۰۲۴)، به بررسی نفوذ آب شور به سفره‌های آب شیرین با استفاده از تکنیک‌های ژئوفیزیکی و ژئوشیمیایی در دلتای نیجریه پرداختند. نتایج آن‌ها سطوح بالای رسانایی الکتریکی، شوری و کل جامدات محلول را نشان داده بود که از استانداردهای WHO فراتر رفته است. علاوه بر این، غلظت بالای کلرید، سدیم و پتاسیم، نفوذ آب شور را تأیید کرد. همچنین آن‌ها آسیب‌پذیری منطقه مورد مطالعه را در کلاس‌های با آسیب‌پذیری کم و متوسط دسته‌بندی نمودند.

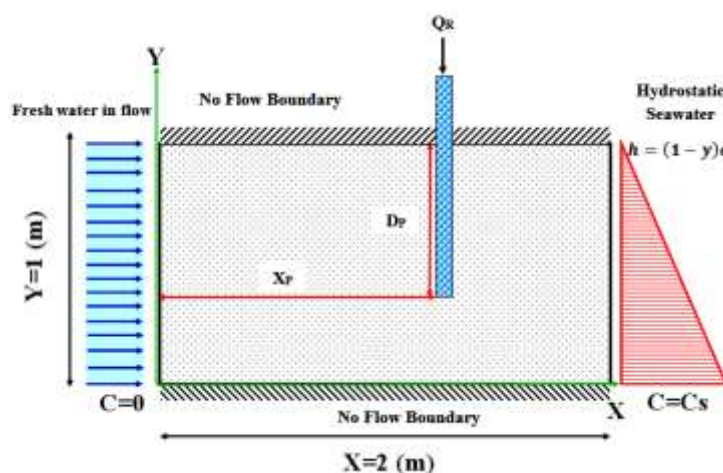
روش‌شناسی پژوهش

روش‌های بدون شبکه به دلیل عدم نیاز به تعریف شبکه‌های پیچیده، بر روش عددی المان محدود (FEM) و روش حجم محدود (FVM) برتری دارند. این روش‌ها از تقریب‌های محلی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌کنند و در مسائلی با هندسه‌های پیچیده، تغییر شکل‌های بزرگ یا مرزهای متحرک عملکرد بهتری دارند. علاوه بر این، روش‌های بدون شبکه نسبت به مسائل با گرادین‌های شدید و تغییرات ناگهانی خواص فیزیکی پایدارتر عمل می‌کنند و نیاز به بازسازی شبکه در طول حل مسئله ندارند، که باعث افزایش دقت و کاهش هزینه محاسباتی می‌شود (Liu et al., 1995; Atluri & Zhu, 1998؛ کریم زاده و همکاران، ۱۴۰۳). همچنین در مطالعات Atluri and Zhu (۱۹۹۸) و Liu and Gu (۲۰۰۵) روش MLPG به عنوان یک روش جدید در مکانیک محاسباتی معرفی شده است که قابلیت‌های بالایی در حل مسائل پیچیده دارد. کریم‌زاده و همکاران (۲۰۲۴)، از روش MLPG برای شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی استفاده کردند و نتایج آن‌ها نشان‌دهنده دقت بالای این روش در مدل‌سازی مسائل هیدرولوژیکی است. مدل شبیه‌سازی عددی حاضر در محیط نرم‌افزار MATLAB توسعه یافته و با بهره‌گیری از الگوریتم‌های عددی کارآمد، توانایی اجرای ساده و سریع، همراه با دقت بالا در حل مسائل جریان زیرزمینی و آبخوان‌های ساحلی را دارا می‌باشد. این مدل امکان شبیه‌سازی فرآیندهای هیدرودینامیکی پیچیده، از جمله نفوذ آب دریا و جابجایی املاح، را با حداقل نیاز به تنظیمات پیچیده فراهم می‌کند و از نظر کارایی و انعطاف‌پذیری نسبت به روش‌های

سنّتی برتری دارد. در ادامه معادلات حاکم بر جریان، فرضیه‌ها، داده‌های اصلی و شرایط مرزی مربوط به رویکرد عددی به مسئله هنری و منطقه مورد مطالعه انتخاب شده از آبخوان ساحلی را شرح می‌دهد (Javadi, 2015).

۳. ۱. مدل مورد مطالعه

مدل شبیه‌سازی MLPG در این مطالعه برای یکی از پرکاربردترین مسائل معیار نفوذ آب شور (مسئله هنری) مورد بحث قرار می‌گیرد. این مطالعه موردی یک آبخوان محصور، تحت سه شرایط مرزی: نرخ تغذیه ثابت آب شیرین در مرز چپ، فشار هیدرو استاتیک آب دریا در مرز راست و مرزهای نفوذناپذیر در امتداد مرزهای بالا و پایین آبخوان است (Voss and Provost, 2010). آبخوان مورد مطالعه برای مسئله هنری در شکل (۱) نشان داده شده است (Javadi, 2015). در این مدل آبخوان همگن و همسان که آب شیرین با $C=0$ از یک مرز و آب شور دریا با $C>0$ از مرز دیگر وارد می‌شود و تداخل آب شور و شیرین در داخل مقطع اتفاق می‌افتد. مرزهای بالا و پایین آبخوان نفوذناپذیر می‌باشند (Hans and Diersch, 2014). خلاصه‌ای از پارامترهای مدل در جدول ۱ طبق گفته Hughes and Sanford (۲۰۰۴) ارائه شده است. در این پژوهش، شبکه نقاط به صورت منظم با فواصل یکنواخت $0/1$ متر در هر دو جهت (x) و (y) تولید شده و کل دامنه شامل 231 گره بوده است. علاوه بر این، تحلیل حساسیت نسبت به چگالی نقاط انجام شد و نتایج نشان داد که افزایش تعداد گره‌ها از 231 به 350 گره تأثیر معنی‌داری بر تغییر نتایج نداشته اما زمان محاسبات را افزایش داده است. این توضیحات به متن مقاله افزوده شد. پارامتر (a) در شرط مرزی بالادست بیانگر شار ورودی آب شیرین بوده و مقدار آن از Q_{in} مشتق شده است ابتدا مدل مرجع هنری با استفاده از روش MLPG شبیه‌سازی و صحت آن بررسی شد. سپس نتایج با مدل Abd-Elaty و Polemio در سال 2023 برای اعتبارسنجی مقایسه گردید.



شکل ۱. شمای کلی نمونه مورد مطالعه مسئله هنری

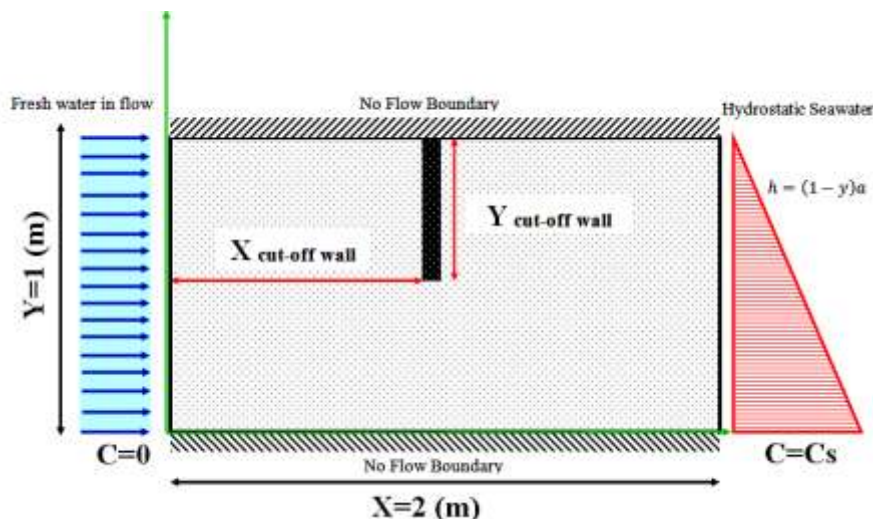
جدول ۱. پارامترهای مورد استفاده در مسئله هنری (Javadi, 2015).

عنوان متغیر	نماد متغیر	واحد	مقدار
ضریب نفوذ مولکولی آب	D_m	m^2/s	$1.0 \times 10^{-4} \times 1.8571$
دبی آب شیرین	Q_{in}	m^3/s	$1.0 \times 10^{-3} \times 6$
نفوذپذیری ذاتی	K	m^2	$1.0 \times 10^{-9} \times 1.02041$
تغییر چگالی سیال با غلظت	$\partial p / \partial C$	$kg^2 / kg_* . m^3$	700
تخلخل	ε	بدون بعد	$0/35$
شتاب گرانشی	g	m/s^2	$9/8$
ضریب جرمی املاح آب دریا	C_s	kg / kg_*	$0/357$
چگالی آب دریا	ρ_s	kg/m^3	$1024/99$
چگالی آب شیرین	ρ_F	kg/m^3	1000
ویسکوزیته سیال	μ	$kg / m . s$	$0/01$
پراکندگی عرضی و طولی	α_T, α_L	m	0
$kg =$ جرم آب دریا $kg_* =$ جرم جامدات محلول			

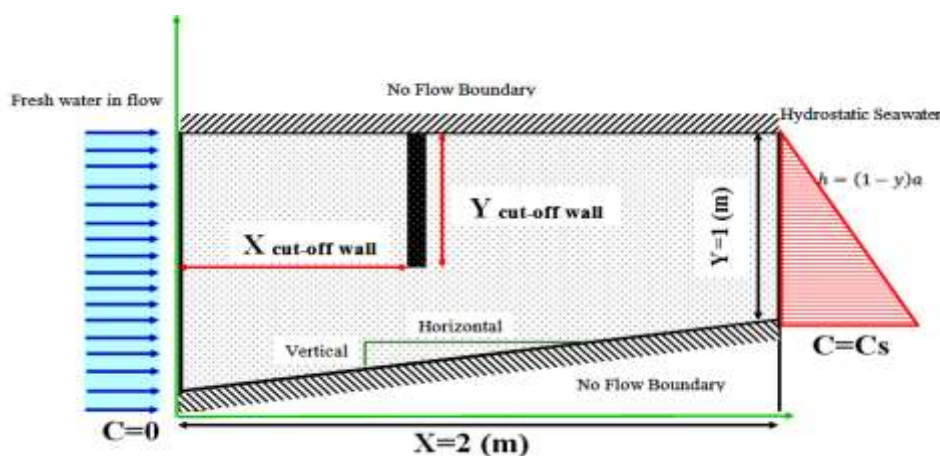
راه‌حل شبیه‌سازی شده بر روی سه نوع شیب بستر آبخوان ساحلی، با استفاده از دیوار آب‌بند در فاصله ۰/۲ متر از ساحل با پارامترها و شرایط مرزی یکسان در حالت پایه مورد بررسی قرار می‌گیرد. این مطالعه سه مورد از شیب بستر آبخوان شامل شیب به سمت دریا (شیب ساحلی SS) با شیب ۱۰ (افقی) به ۱ (عمودی)؛ بستر افقی (H) و شیب به سمت خشکی (شیب کنار دریا: LS) را با نسبت ۱۰:۱ (شکل ۲، ۳ و ۴) شبیه‌سازی شده است. شیب بستر با تغییر هندسی دامنه و اعمال تبدیل مختصات در گره‌های دامنه مدل‌سازی شده است. برای بررسی تأثیر عمق دیواره‌های زیرسطحی، عمق‌های ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ سانتی‌متر انتخاب شدند. این محدوده‌ها بر اساس مطالعات پیشین در زمینه طراحی موانع زیرسطحی مهندسی و همچنین محدودیت‌های اجرایی و اقتصادی تعیین شده‌اند (Abdoulhalik et al., 2017؛ Armanuos et al., 2020). انتخاب این عمق‌ها به گونه‌ای انجام شد که امکان ارزیابی تدریجی تأثیر افزایش عمق دیواره بر کنترل نفوذ شورابه فراهم شود و بتوان رابطه بین عمق دیواره و کارایی آن را به شکل کمی تحلیل کرد. میزان پیشروی آب شور و درصد دفع نمک (معادله ۱) نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$SR = (C_0 - C)/C_0 \% \quad \text{رابطه ۱}$$

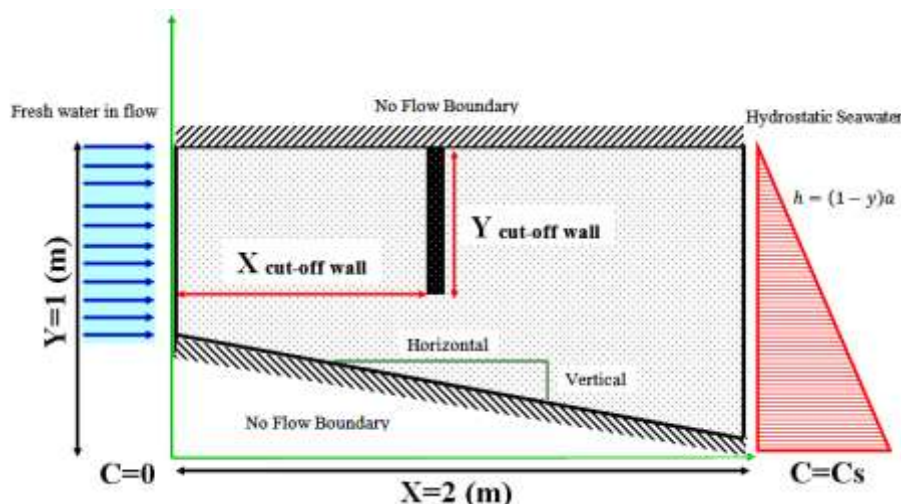
که در آن C_0 غلظت اولیه نمک آب زیرزمینی و C غلظت نمک آب زیرزمینی در سناریوی پیشنهادی است. مقدار دافعه منفی (-) به این معنی است که شوری آب زیرزمینی افزایش یافته است درحالی‌که مقدار دافعه مثبت (+) به این معنی است که شوری آب زیرزمینی کاهش یافته است.



شکل ۲. مثال ۱ آبخوان ساحلی با بستر افقی



شکل ۳. مثال ۲ آبخوان ساحلی با شیب به سمت خشکی



شکل ۴. مثال ۳ آبخوان ساحلی با شیب به سمت ساحل

روش بدون شبکه

روش بدون شبکه یا روش‌های بدون المان، دسته‌ای از روش‌های عددی هستند که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده می‌شوند. برخلاف روش‌های سنتی مانند روش اجزا محدود یا روش تفاضل محدود که نیاز به ایجاد یک شبکه از المان‌ها یا نقاط گسسته در دامنه مسئله دارند، روش‌های بدون شبکه این نیاز را برطرف می‌کنند.

روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین (MLPG)

روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین با شکل ضعیف معادلات استوار است. در استفاده از فرم ضعیف می‌توان در حل بعضی معادلات دیفرانسیل جمله انتگرال مرزی بر روی مرز نیومن و یا مشتق‌های آن که در شکل قوی مورد استفاده قرار گرفته‌اند را حذف کرد. با کاهش مرتبه توابع میدانی u و استفاده از فرم ضعیف حل معادلات دیفرانسیل تقارن معادلات جبری حاصل می‌گردد (Hans and Diersch, 2014).

معادلات حاکم بر جریان

معادلات حاکم بر جریان آب زیرزمینی، مجموعه‌ای از معادلات ریاضی هستند که حرکت آب در محیط‌های متخلخل زیرزمینی را توصیف می‌کنند. معادلات حاکم بر جریان‌های وابسته به چگالی تحت شرایط دمایی ثابت، از دو معادله دیفرانسیل جفت شده جریان و انتقال شوری تشکیل شده است؛ بنابراین در یک سیستم آبخوان اشباع معادله جریان برحسب بار هیدرولیکی آب شیرین معادل را می‌توان به صورت ذیل بیان نمود (Diersch, 1988; Bear, 1999).

$$q_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left[\frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho \cdot g \cdot e_j \right] \quad \text{رابطه ۲}$$

در معادله فوق، k_{ij} نفوذپذیری ذاتی در محیط متخلخل (L^2)، μ ویسکوزیته دینامیکی سیال ($ML^{-1}T^{-1}$)، p فشار سیال ($ML^{-1}T^{-1}$)، ρ چگالی سیال (ML^{-3})، e_j مؤلفه بردار واحد جاذبه ($L T^{-2}$) و g شتاب جاذبه ($L T^{-2}$) می‌باشد.

حل معادلات زیرزمینی آبخوان ساحلی با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

معادلات نفوذ آب شور شامل معادله جریان و معادله انتقال محلول می‌باشند که در ادامه به روش بدون شبکه پتروو-گالرکین گسسته سازی می‌شوند (Rastogi et al., 2004).

$$k_{Lxx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_{Lyy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = k_{Lyy} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \quad \text{رابطه ۳}$$

$$k_{Lxx} \cdot \int_{\Omega} W_i \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} d\Omega + k_{Lyy} \cdot \int_{\Omega} W_i \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} d\Omega = -k_{Lyy} \cdot \varepsilon \cdot \int_A \frac{\partial C}{\partial y} dA \quad \text{رابطه ۴}$$

با انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$k_{Lxx} \cdot \int_S W_i \cdot \frac{\partial h}{\partial x} dS - k_{Lxx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} dA + k_{Lyy} \cdot \int_S W_i \cdot \frac{\partial h}{\partial y} dS - k_{Lyy} \cdot \int_\Omega \frac{W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} dA$$

$$= -k_{Lyy} \cdot \varepsilon \int_A W_i \frac{\partial C}{\partial y} dA \quad \text{رابطه ۵}$$

$$h = \sum h_i \varphi_i \quad \text{رابطه ۶}$$

$$C = \sum C_i \varphi_i \quad \text{رابطه ۷}$$

با جایگذاری روابط (۶) و (۷) در معادله (۵) و مشتق‌گیری از توابع شکل آن‌ها حالت گسسته معادله سطح آب زیرزمینی خواهد شد:

$$-k_{Lxx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} h dA - k_{Lyy} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} h dA$$

$$= -k_{Lyy} \cdot \varepsilon \int_A W_i \frac{\partial \varphi}{\partial y} C dA + k_{Lxx} \cdot \int_S W_i \cdot \frac{\partial h}{\partial x} n_x dS$$

$$+ k_{Lyy} \cdot \int_S W_i \cdot \frac{\partial h}{\partial y} n_y dS \quad \text{رابطه ۸}$$

$$K_1 \cdot u_1 = F_1 \quad \text{رابطه ۹}$$

$$K_1 = k_{Lxx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} dA + k_{Lyy} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} dA \quad \text{رابطه ۱۰}$$

$$u_1 = h \quad \text{رابطه ۱۱}$$

$$F_1 = k_{Lyy} \cdot \varepsilon \int_A W_i \frac{\partial \varphi}{\partial y} C dA + k_{Lxx} \cdot \int_S W_i \cdot \frac{\partial h}{\partial x} n_x dS + k_{Lyy} \cdot \int_S W_i \cdot \frac{\partial h}{\partial y} n_y dS \quad \text{رابطه ۱۲}$$

ماتریس سختی K_1 طبق توابع شکل و وزن و بردار نیروی گرهی F_1 با معلوم بودن شرط اولیه غلظت در دامنه و همچنین شرط مرزی نیومن در جهت x و y تعیین می‌گردند (کریم زاده و همکاران، ۱۴۰۳).

معادله سرعت خطی میانگین

معادله سرعت خطی میانگین آب زیرزمینی که به‌عنوان «سرعت داری» هم شناخته می‌شود، به‌صورت زیر است:

$$V_x + \frac{A}{\theta} k_{Lxx} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{رابطه ۱۳}$$

$$V_y + \frac{A}{\theta} k_{Lyy} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \varepsilon \cdot C \right) = 0 \quad \text{رابطه ۱۴}$$

در معادله فوق، V سرعت داری یا سرعت خطی میانگین برحسب طول بر زمان، k_L هدایت هیدرولیکی محیط متخلخل برحسب طول بر زمان، $\frac{\partial h}{\partial x}$ و $\frac{\partial h}{\partial y}$ گرادیان هیدرولیکی می‌باشد (اکبرپور و همکاران، ۱۴۰۳).

$$\int_A W_i \cdot V_x dA = - \int_A W_i \cdot \frac{A}{\theta} k_{Lxx} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) dA \quad \text{رابطه ۱۵}$$

$$\int_A W_i \cdot V_y dA = - \int_A W_i \cdot \frac{A}{\theta} k_{Lyy} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial y} + \varepsilon \cdot C \right) dA \quad \text{رابطه ۱۶}$$

$$k_{Lii} = A \cdot V_i \quad \text{رابطه ۱۷}$$

$$\int_A W_i \cdot V_x dA = - \int_A W_i \cdot \frac{A}{\theta} k_{Lxx} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dA \quad \text{رابطه ۱۸}$$

$$- \frac{A}{\theta} \cdot A \int_A W_i \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cdot h \cdot V_x dA = \int_A W_i \cdot \frac{k_{Lxx}}{A} dA \quad \text{رابطه ۱۹}$$

$$\int_A W_i \cdot V_y dA = - \int_A W_i \cdot \frac{A}{\theta} \cdot A \cdot V_y \cdot \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot h + \varepsilon \cdot C \right) dA \quad \text{رابطه ۲۰}$$

$$- \frac{A}{\theta} \cdot A \int_A W_i \cdot \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot h + \varepsilon \cdot C \right) \cdot V_y dA = \int_A W_i \cdot \frac{k_{Lyy}}{A} dA \quad \text{رابطه ۲۱}$$

با حل دو دستگاه معادله فوق برای متغیر سرعت در دو جهت محور مختصات مقادیر پراکندگی نیز طبق روابط (۲۲-۲۹) به دست می‌آیند (کریم زاده و همکاران، ۱۴۰۳).

$$K_2 \cdot u_2 = F_2 \quad \text{رابطه ۲۲}$$



$$K_2 = -\frac{A}{\theta} \cdot A \int_A W_i \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \cdot h dA \quad \text{رابطه ۲۳}$$

$$u_2 = V_x \quad \text{رابطه ۲۴}$$

$$F_2 = \int_A W_i \cdot \frac{k_{Lxx}}{A} dA \quad \text{رابطه ۲۵}$$

$$K_3 \cdot u_3 = F_3 \quad \text{رابطه ۲۶}$$

$$K_3 = -\frac{A}{\theta} \cdot A \int_A W_i \cdot \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \cdot h + \varepsilon \cdot C \right) dA \quad \text{رابطه ۲۷}$$

$$u_3 = V_y \quad \text{رابطه ۲۸}$$

$$F_3 = \int_A W_i \cdot \frac{k_{Lyy}}{A} dA \quad \text{رابطه ۲۹}$$

گسسته سازی معادله انتقال و پخش

معادله انتقال پخش - از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است و از ترکیب معادله پیوستگی و قانون اول فیک به دست می‌آید. این معادله کاربردهای فراوانی در شبیه‌سازی پدیده‌های هیدرولیکی مانند نفوذ آب دارد (شکری و سید رحمان، ۱۳۹۲).

$$D_{xx} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_{yy} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_{xy} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} + D_{yx} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} - \left(V_x \frac{\partial C}{\partial x} + V_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \cdot d_L = 0 \quad \text{رابطه ۳۰}$$

$$D_{xx} \cdot \int_{\Omega} W_i \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} d\Omega + D_{yy} \cdot \int_{\Omega} W_i \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} d\Omega + D_{xy} \cdot \int_{\Omega} W_i \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} d\Omega + D_{yx} \cdot \int_{\Omega} W_i \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} d\Omega - d_L \cdot V_x \int_{\Omega} W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} d\Omega - d_L \cdot V_y \int_{\Omega} W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial y} d\Omega = 0 \quad \text{رابطه ۳۱}$$

با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$D_{xx} \cdot \int_S W_i \frac{\partial C}{\partial x} dS + D_{xx} \cdot \int_A \frac{\partial W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial x} dA + D_{yy} \cdot \int_S W_i \frac{\partial C}{\partial y} dS + D_{yy} \cdot \int_A \frac{\partial W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} dA + D_{xy} \cdot \int_S W_i \frac{\partial C}{\partial y} dS + D_{xy} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial y} dA + D_{yx} \cdot \int_S W_i \frac{\partial C}{\partial x} dS + D_{yx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial x} dA - d_L \cdot V_x \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} dA - d_L \cdot V_y \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial y} dA = 0 \quad \text{رابطه ۳۲}$$

با جایگذاری رابطه (۳۱) در معادله (۳۰) و مشتق گیری از توابع شکل آن‌ها حالت گسسته معادله انتقال خواهد شد:

$$D_{xx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot CdA + D_{yy} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot CdA + D_{xy} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot CdA + D_{yx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot CdA - d_L \cdot V_x \int_A W_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot CdA - d_L \cdot V_y \int_A W_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot CdA = D_{xx} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \cdot n_x dS + D_{yy} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \cdot n_y dS + D_{yx} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \cdot n_x dS + D_{xy} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \cdot n_y dS \quad \text{رابطه ۳۳}$$

با حل دستگاه معادله داریم:

$$K_4 \cdot u_4 = F_4 \quad \text{رابطه ۳۴}$$

$$K_4 = D_{xx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot CdA + D_{yy} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot CdA + D_{xy} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot CdA + D_{yx} \cdot \int_A \frac{W_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot CdA - d_L \cdot V_x \int_A W_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot CdA - d_L \cdot V_y \int_A W_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot CdA \quad \text{رابطه ۳۵}$$

$$u_4 = C \quad \text{رابطه ۳۶}$$

$$F_4 = D_{xx} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \cdot n_x dS + D_{yy} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \cdot n_y dS + D_{yx} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial x} \cdot n_x dS + D_{xy} \cdot \int_A W_i \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \cdot n_y dS \quad \text{رابطه ۳۷}$$

ماتریس سختی معادله انتقال با معلوم بودن پارامترهای پراکندگی، سرعت و توابع شکل و وزن قابل تعیین بوده و بردار نیروی گرهی نیز با مشخص بودن شرط مرزی نیومن برای غلظت در جهت x معلوم هست. لازم به ذکر است که در مسئله نفوذ آب شور شرط مرزی نیومن غلظت در جهت y موجود نیست. پس ترم دوم و سوم انتگرال مرزی قابل حذف می‌باشد (کریم زاده و همکاران، ۱۴۰۳).

تابع شکل در روش بدن شبکه

توابع شکل برای تقریب متغیرهای میدان (مانند هد هیدرولیکی، غلظت) در هر زیر دامنه محلی استفاده می‌شوند. تابع شکل با استفاده از درون‌یابی نقطه‌ای؛ یکی از قدیمی‌ترین روش‌های درون‌یابی است که k تابع پایه‌ای در معادله‌ی $U(X)$ با استفاده از چندجمله‌ای پاسکال است (محتشمی، ۱۳۹۵). روش درون‌یابی نقطه‌ای تابع $U(X)$ را روی دامنه‌ی Ω توسط نقاط پراکنده نشان داده شده است در نقطه‌ی x به صورت معادله‌ی (۳۸) در نظر می‌گیرند (Voss and Provost, 2010).

$$U^h(x) = \sum_j^m p_j(x) a_j(x) \quad \text{رابطه ۳۸}$$

ساخت تابع وزن در روش بدون شبکه

یک تابع وزن مناسب باید فقط در یک همسایگی کوچک x_i که دامنه تأثیر گره I نامیده می‌شود غیر صفر باشد. یکی از ویژگی‌های مفید تقریب حداقل مجذور مربعات متحرک این است که پیوستگی آن‌ها معادل پیوستگی تابع وزن آن‌ها است. یعنی با انتخاب یک تابع وزن مناسب می‌توان تقریب‌های با درجه پیوستگی بالا داشت (Yu et al., 2015).

تابع وزن در تقریب حداقل مربعات متحرک و عملکرد نقش اساسی را ایفا می‌کند. تابع وزن انواع مختلفی از جمله گوسی، کواریتیک و اسپیلاین را شامل می‌شود، از آنجایی که در این مطالعه از تابع وزن اسپیلاین استفاده شده، نحوه محاسبه آن در معادله‌ی (۳۸ و ۳۹) شرح داده شده است (Liu et al., 1995).

$$W_i(X) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 + \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad \text{رابطه ۳۹}$$

$$\bar{r}_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w} \quad \text{رابطه ۴۰}$$

در معادله‌ی (۳۹)، r_w شعاع تأثیر نقطه‌ی گرهی x_i و d_i فاصله‌ی بین نقطه‌ی x_i تا نقطه‌ی x می‌باشد. برای هر نقطه r_w باید به گونه‌ای انتخاب شود که تعداد وزن‌های غیر صفر بزرگ‌تر از تعداد تک‌تک جملات موجود در چندجمله‌ای باشند.

شرایط مرزی

برای حل معادلات جریان و انتقال در پدیده نفوذ آب شور باید شرایط مرزی و اولیه مناسب در مسائل معلوم باشد. در مسئله زیر شرایط مرزی در جدول (۱) نشان داده شده است. شرط نیومن صفر در جهت y نشان‌دهنده عدم شار ماده و سازگار با قانون بقای جرم است. هد در مرز راست به صورت نرمال شده بیان شده و برای بازسازی شرایط فشار هیدرواستاتیک آب دریا استفاده می‌شود

جدول ۲. شرایط مرزی و اولیه مسئله هنری

موقعیت	مختصات	هد	غلظت
مرز چپ	(0, y)	$\frac{\partial h}{\partial x}(0, y) = -5.7024$	$C(0, y) = 0$
مرز راست	(2, y)	$h(2, y) = (1 - y)0.025$	$C(2, y) = 0.35 \leq y \leq 0.5$
مرز بالا	(x, 1)	بدون جریان	$\frac{\partial c}{\partial y}(x, 1) = 0$
مرز پایین	(x, 0)	بدون جریان	$\frac{\partial c}{\partial y}(x, 0) = 0$



معیارهای ارزیابی و سنجش نتایج

جهت ارزیابی و سنجش مدل شبیه‌سازی در روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین از جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) در برآورد میزان خطای خطوط هم شوری مدل‌سازی شده‌ی اولیه بدون در نظرگیری دیواره آب‌بند در مقایسه با مسئله هنری در مطالعه‌ی Abd-Elaty & Polemio (2023) استفاده شده است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_T - X_{TMLPG})^2}{n}} \quad \text{رابطه ۴۱}$$

$$NS = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_T - \widehat{X_{TMLPG}})}{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_T - \widehat{X_{TMLPG}})} \quad \text{رابطه ۴۲}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_T - \widehat{X_{TMLPG}})^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{X}_T - \widehat{X_{TMLPG}})^2} \quad \text{رابطه ۴۳}$$

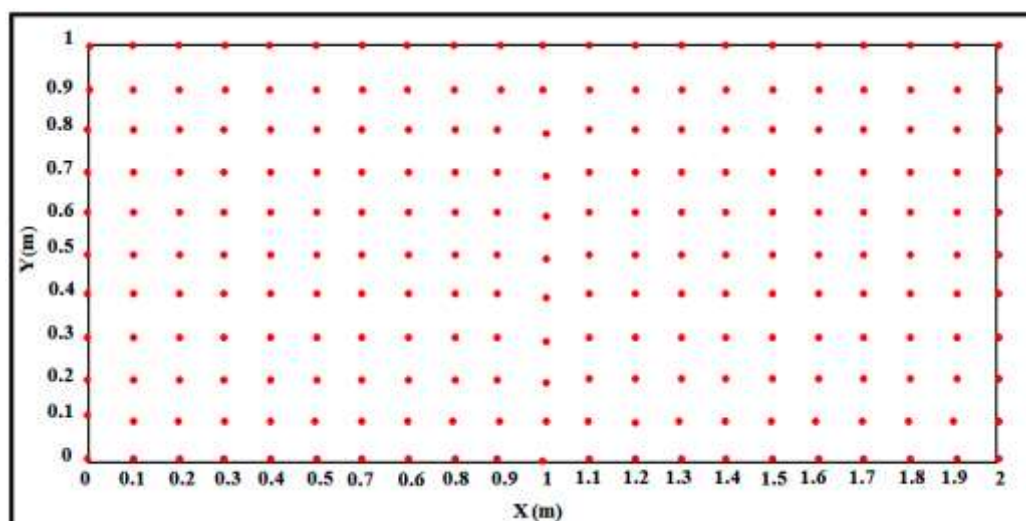
که در معادلات فوق، $\hat{X}_T$ و X_{TMLPG} به ترتیب میزان خطوط هم شوری مدل تأییدشده و شبیه‌سازی شده توسط روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در آبخوان فرضی است. مقدار عدد پکلت برای مدل عددی بدون شبکه پتروو-گالرکین با معادله (۴۴) محاسبه شد و مقدار آن کمتر از ۲ به دست آمد، که نشان‌دهنده پایداری مناسب حل عددی است. این محاسبه اطمینان می‌دهد که راه‌حل‌های عددی همگرا و بدون نوسان هستند.

$$\frac{vL}{D} = Pe \quad \text{رابطه ۴۴}$$

در معادله (۴۴)، v سرعت جریان (متر بر ثانیه)، L طول مشخصه (متر) و D ضریب نفوذپذیری می‌باشد.

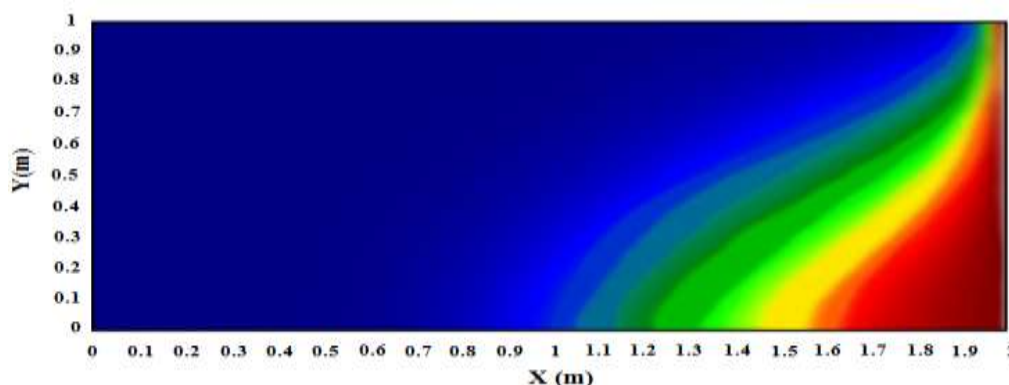
بحث و یافته‌های پژوهش

در این مطالعه شبکه‌بندی با فواصل ۰/۱ متر در دو جهت طولی و عرضی انجام گرفته است و شامل ۲۳۱ گره می‌باشد.



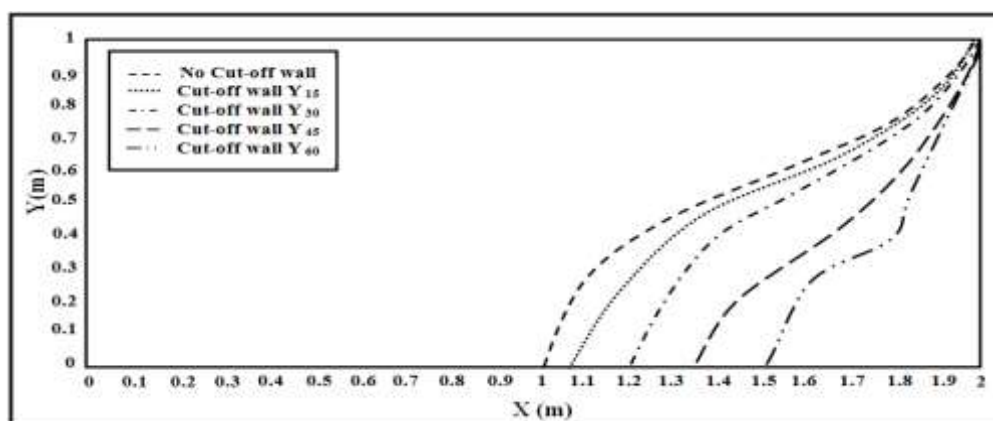
شکل ۵. نمای شماتیک آبخوان مورد مطالعه در روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

نتایج مدل منحنی هم غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (H) با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نشان داده است میزان پیشروی نفوذ آب شور در آبخوان ساحلی به میزان ۱ متر بوده است.



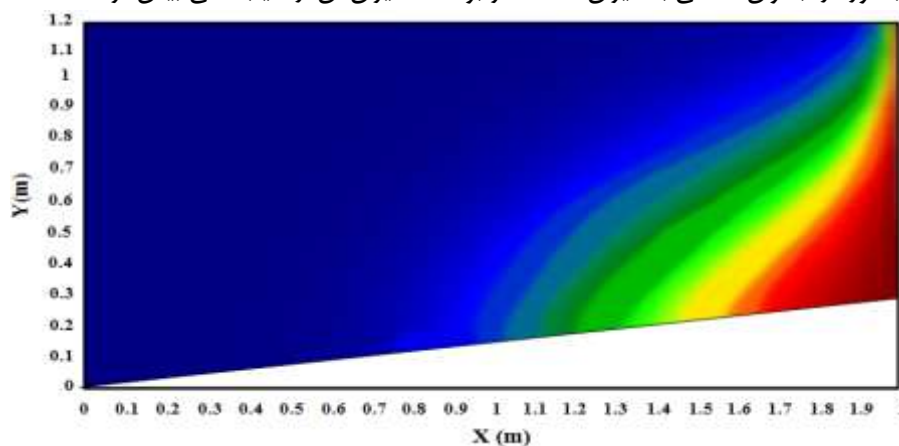
شکل ۶. کانتور غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (H) با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین بدون دیوار

سپس مدل H برای سناریوهای مختلف با عمق‌های مختلف دیواره آب‌بند انجام شد. نتایج نشان داده است میزان پیشروی نفوذ آب‌شور در آبخوان ساحلی در حالتی که دیوار آب‌بند به‌اندازه ۱۵ سانتی‌متر مدل گردد، به میزان ۰/۹۳ متر بوده است. در حالتی که دیواره آب‌بند در عمق‌های ۱۵، ۳۰ و ۴۵ قرار گیرد به ترتیب میزان نفوذ آب‌شور به ۰/۸، ۰/۶۷ و ۰/۵ متر کاهش پیدا می‌کند. روند رو کاهش میزان نفوذ آب‌شور نشان دهنده‌ی میزان کارایی دیوار آب‌بند در این مسئله می‌باشد. در مدل H دیواره ۶۰، ۴۵، ۳۰ و ۱۵ به ترتیب به میزان ۵۰ درصد، ۳۳ درصد، ۲۰ درصد و ۷ درصد نسبت به زمانی که دیواره وجود نداشته است، میزان پیشروی آب‌شور را کاهش داده است.



شکل ۷. غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (H) در سناریوهای مختلف با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

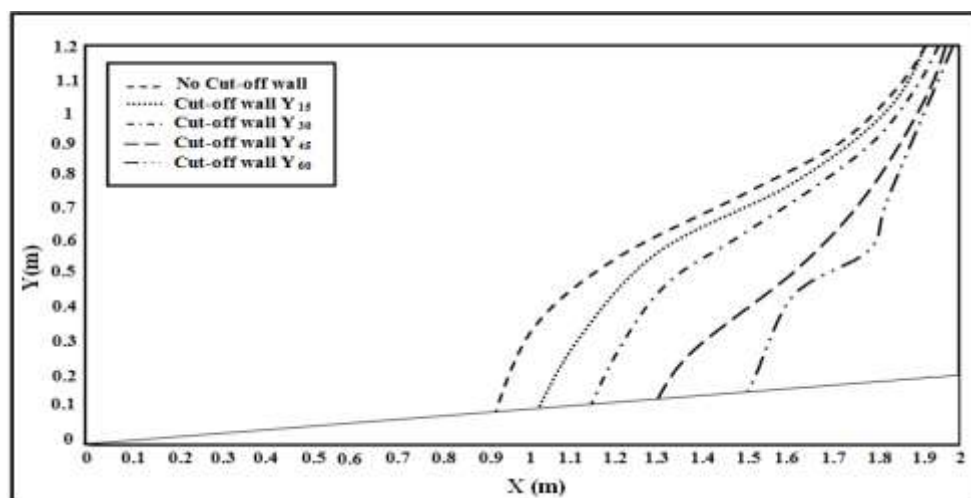
نتایج مدل منحنی هم غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (LS) با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نشان داده است میزان پیشروی نفوذ آب‌شور در آبخوان ساحلی به میزان ۱/۰۵ متر بوده که میزان آن از شیب افقی بیش تر است.



شکل ۸. کانتور غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (LS) با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین بدون دیوار

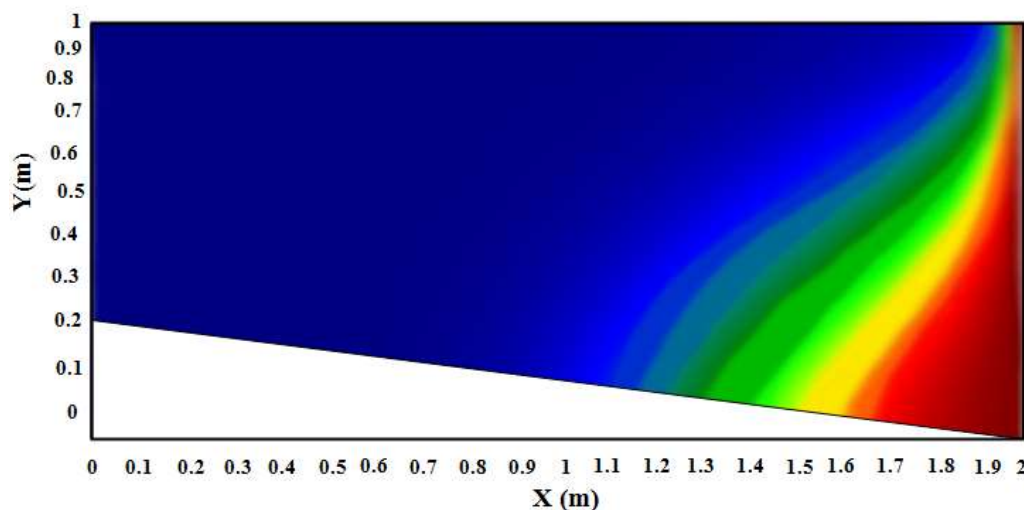


سپس مدل LS برای سناریوهای مختلف با عمق‌های مختلف دیواره آب‌بند انجام شد. نتایج نشان داده است میزان پیشروی نفوذ آب‌شور در آبخوان ساحلی در حالتی که دیوار آب‌بند در عمق‌های ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ قرار می‌گیرد به ترتیب میزان نفوذ آب‌شور به ۰/۹۹، ۰/۸۸، ۰/۷۱ و ۰/۵ متر کاهش پیدا می‌کند. در مدل LS دیواره ۶۰، ۴۵، ۳۰ و ۱۵ میزان پیشروی را به ترتیب به اندازه‌ی ۵۲/۳۸ درصد، ۳۲/۳۸ درصد، ۱۶/۱۹ درصد و ۵/۷ درصد کاهش داده است.



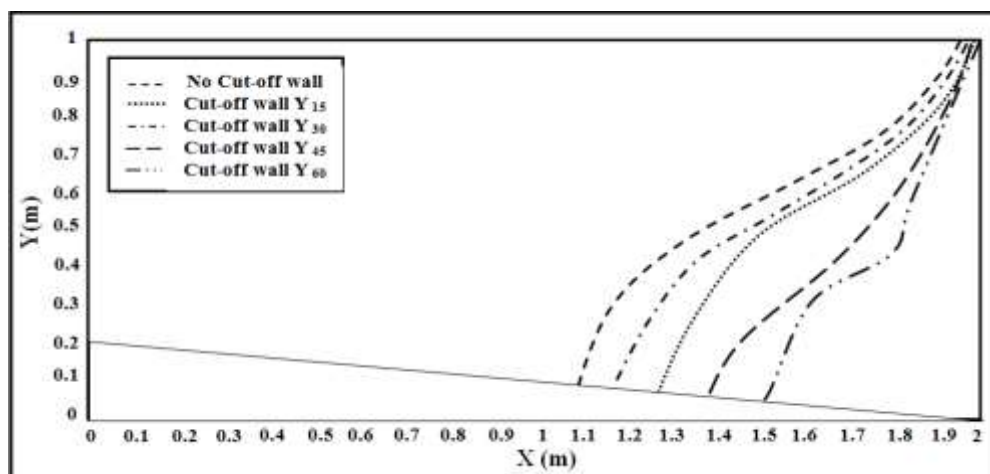
شکل ۹. غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (LS) در سناریوهای مختلف با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

نتایج مدل منحنی هم غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (SS) با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نشان داده است میزان پیشروی نفوذ آب‌شور در آبخوان ساحلی به میزان ۰/۹ متر بوده است.



شکل ۱۰. کانتور غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (SS) با روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین بدون دیوار

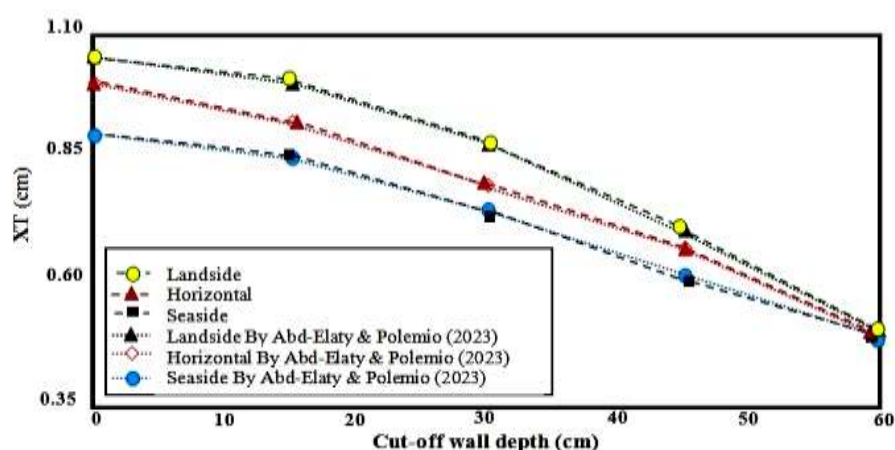
نتایج مدل SS برای سناریوهای مختلف با عمق‌های مختلف دیوار آب‌بند نشان داده است که میزان پیشروی نفوذ آب‌شور در آبخوان ساحلی در حالتی که دیوار آب‌بند به اندازه‌ی ۱۵ سانتی‌متر است به میزان ۰/۸۶ متر بوده است. در حالتی که دیواره آب‌بند در عمق‌های ۳۰، ۴۵ و ۶۰ قرار می‌گیرد به ترتیب میزان نفوذ آب‌شور به ۰/۷۶، ۰/۷۲ و ۰/۵ متر کاهش پیدا می‌کند. در مدل SS روند رو کاهش میزان نفوذ آب‌شور نشان دهند میزان کارایی دیوار آب‌بند در این مسئله هست. همچنین نتایج نشان داده است که مدل LS بیش‌ترین پیشروی را داشته است و نسبت به مدل H و SS به ترتیب به میزان ۵ درصد و ۱۶/۶۶ درصد افزایش یافته است. در تمامی مدل‌ها پیشروی در سناریو دیواره ۰/۶ متر برابر ۰/۵ متر بوده و کم‌ترین نفوذ را داشته است لذا می‌توان از این سناریو به عنوان عمق بهینه و کارا در تمامی مدل‌ها نام برد.



شکل ۱۱. غلظت شوری در آبخوان ساحلی افقی (SS) در سناریوهای مختلف با روش عددی بدون شبکه محلی پترو-گالرکین

اعتبار سنجی مدل

نتایج این مطالعه نشان داد است که شیب بستر آبخوان تأثیر مرتبطی بر نفوذ آب شور دارد که در آن شیب جانبی زمین میزان نفوذ آب شور بیشتری نسبت به شیب‌های افقی و ساحلی دارد. نتایج حاصل از مدل مطالعه حاضر بوسیله‌ی روش عددی بدون شبکه پتروگالرکین با روش مطالعه Abd-Elaty و Polemio (۲۰۲۳) مورد بررسی قرار گرفت و نتایج نشان داده است مدل حاضر از کارایی بالایی برخوردار است.



شکل ۱۲. مقایسه میزان پیشروی آب شور در مطالعه حاضر با Abd-Elaty و Polemio (۲۰۲۳)

برای تقویت تحلیل خطا و ارزیابی دقیق دقت مدل عددی MLPG، علاوه بر شاخص RMSE، دو شاخص مهم دیگر شامل ضریب تعیین R^2 و کارایی NSE نیز محاسبه شدند. این شاخص‌ها امکان بررسی همزمان دقت عددی، همبستگی با داده‌های مرجع و توانایی مدل در بازتولید روند دینامیکی جبهه آب شور را فراهم می‌کنند. مقادیر عددی شاخص‌ها برای سه حالت شیب آبخوان (SS و H و LS) و چهار عمق دیواره آب‌بند (۰/۱۵، ۰/۳۰، ۰/۴۵ و ۰/۶۰ متر) استخراج شده و در جدول نتایج ارائه شده است.

مقادیر RMSE در تمام سناریوها کمتر از ۰/۰۶ است، که نشان‌دهنده خطای میانگین بسیار پایین بین شبیه‌سازی و داده‌های مرجع می‌باشد و دقت بالای مدل در بازسازی رفتار جبهه آب شور را تأیید می‌کند. با افزایش عمق دیواره از ۰/۱۵ تا ۰/۶۰ متر، RMSE به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد؛ این کاهش ناشی از کاهش نفوذ شورابه و بهبود پایداری حل عددی است.

مقادیر R^2 در تمام حالت‌ها بالاتر از ۰/۹۵ بوده و بیشترین مقدار (۰/۹۸۷) در حالت H با عمق ۰/۶۰ متر مشاهده شد. این نشان می‌دهد که مدل MLPG توانسته تغییرات مکانی غلظت شوری را به طور دقیق پیش‌بینی کند و همبستگی بسیار بالایی با داده‌های مرجع دارد. شاخص NSE نیز در تمامی سناریوها بالاتر از ۰/۹ گزارش شد، که بیانگر کارایی بالا و قابلیت اعتماد مدل در بازتولید روند دینامیکی و شکل جبهه آب شور است.



نتیجه‌گیری از تحلیل شاخص‌ها نشان می‌دهد که دقت کلی مدل در تمام حالات بسیار بالا است و افزایش عمق دیواره اثر مستقیم بر بهبود دقت عددی دارد، به‌طوری که با کاهش RMSE و افزایش NSE، پایداری مدل نیز بهبود یافته است. همچنین، حالت LS نسبت به H و SS کمی خطای بیشتری دارد که ناشی از گرادیان معکوس شیب و افزایش غلظت نمک در مرز پایین دست است. در مجموع، شاخص‌های RMSE، R^2 و NSE نشان‌دهنده عملکرد دقیق، پایدار و قابل اعتماد مدل MLPG در شبیه‌سازی توزیع جبهه آب‌شور هستند.

جدول ۳. محاسبه خطای RMSE، R^2 و NSE در مسئله هنری (Abd-Elaty & Polemio, 2023) و مطالعه حاضر برای بسترهایی با شیب متفاوت

حالت مدل	عمق دیوار (متر)	RMSE	R^2	NSE
H (شیب افقی)	۰/۱۵	۰/۰۴۸	۰/۹۶۲	۰/۹۰۵
	۰/۳۰	۰/۰۳۹	۰/۹۷۱	۰/۹۲۱
	۰/۴۵	۰/۰۳۱	۰/۹۸۲	۰/۹۴۱
	۰/۶۰	۰/۰۲۷	۰/۹۸۷	۰/۹۵۵
LS (شیب به سمت خشکی)	۰/۱۵	۰/۰۵۲	۰/۹۵۵	۰/۹۱۵
	۰/۳۰	۰/۰۴۱	۰/۹۶۹	۰/۹۱۸
	۰/۴۵	۰/۰۳۴	۰/۹۷۹	۰/۹۳۵
	۰/۶۰	۰/۰۲۹	۰/۹۸۵	۰/۹۴۷
SS (شیب به سمت دریا)	۰/۱۵	۰/۰۵۰	۰/۹۶۰	۰/۹۰۲
	۰/۳۰	۰/۰۴۰	۰/۹۷۳	۰/۹۲۶
	۰/۴۵	۰/۰۳۲	۰/۹۸۱	۰/۹۳۹
	۰/۶۰	۰/۰۲۸	۰/۹۸۶	۰/۹۵۰

خطای RMSE در مسئله هنری خطوط هم شوری برای حالت اولیه بدون دیوار آب‌بند و در سناریوهای مختلف در مدل MLPG و مدل Abd-Elaty و Polemio (۲۰۲۳) مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج نشان داده است که مدل مورد مطالعه از دقت بالایی برخوردار بوده است.

جدول ۴. محاسبه خطای RMSE در مسئله هنری (Abd-Elaty & Polemio, 2023) و مطالعه حاضر برای خطوط هم شوری ۰/۲۵، ۰/۵ و ۰/۷۵

خط هم شوری			دل
۰/۷۵	۰/۵	۰/۲۵	
۰/۰۴۵	۰/۰۳۵	۰/۰۴۳	Horizontal
۰/۰۳۹	۰/۰۱۸	۰/۰۲۱	Landside
۰/۰۱۹	۰/۰۱۳	۰/۰۲۵	Seaside

همان‌طور که گفته شد مقدار دافعه مثبت (+) به این معنی است که شوری آب زیرزمینی کاهش یافته است و در این مطالعه نشان می‌دهد میزان دافعه مثبت بوده و میزان شوری کاهش پیدا کرده است. همچنین نتایج نشان داده است با افزایش عمق دیوار آب‌بند میزان دافعه بیش‌تر شده است که نشان‌دهنده عملکرد مثبت دیواره بر نفوذ آب‌شور در آبخوان ساحلی بوده است.

جدول ۵. درصد دفع نمک در مدل‌های مختلف

درصد دفع نمک در شیب‌های بستر متفاوت						نوع مدل
مدل اجزای محدود مطالعه‌ی Abd-Elaty & Polemio (2023)			مطالعه حاضر با روش عددی بدون شبکه پترووگارین (MLPG)			
LS	SS	H	LS	SS	H	
+۶/۰۷	+۶/۲۳	+۰/۹۷	+۵/۹۸	+۶/۲۲	+۰/۹۴	Cut-off wall Y ₁₅
+۱۹/۵۸	+۱۹/۳۸	+۲۴/۷۴	+۱۹/۵۸	+۱۹/۴۰	+۲۴/۲۳	Cut-off wall Y ₃₀
+۳۶/۲۷	+۳۴/۲۶	+۳۵/۳۱	+۳۶/۱۹	+۳۴/۳۱	+۳۵/۱۷	Cut-off wall Y ₄₅
+۵۲/۷۱	+۴۷/۶۴	+۵۰/۳۴	+۵۲/۷۰	+۴۷/۵۴	+۵۰/۲۱	Cut-off wall Y ₆₀

تحلیل حساسیت

در این تحلیل حساسیت، تأثیر تغییرات $\pm 20\%$ درصدی در ضریب هدایت هیدرولیکی (K) بر پیشروی آب شور در آبخوان ساحلی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش (K) موجب افزایش قابل توجه پیشروی جبهه آب شور و کاهش آن باعث پس‌روی جبهه می‌شود. در سناریوی افزایش (K) به میزان 20% ، پیشروی در مدل (LS) حدود 9% و در مدل (SS) حدود 8% افزایش یافته است. در مقابل، با کاهش 20% در مقدار (K)، میزان پیشروی در مدل LS حدود 8% و در مدل SS حدود 6% کاهش یافته است.

به‌طور کلی، حساسیت مدل نسبت به (K) قابل توجه است، زیرا تغییرات کوچک در هدایت هیدرولیکی می‌تواند منجر به تغییرات محسوس در موقعیت جبهه شوری گردد. این رفتار ناشی از نقش کلیدی (K) در کنترل سرعت جریان و توزیع گرادیان‌های هیدرولیکی در آبخوان است. مقایسه بین دو سناریوی LS و SS نشان می‌دهد که لایه سطحی حساسیت بیشتری نسبت به تغییرات (K) دارد، که می‌تواند به دلیل تداخل بالاتر و تأثیر مستقیم‌تر بر تبادل آب شور و شیرین در نواحی کم‌عمق باشد. این یافته‌ها اهمیت تعیین دقیق ضریب (K) در مدل‌سازی عددی و مدیریت پیشروی آب شور را برجسته می‌سازند.

جدول ۶. تحلیل حساسیت ضریب هدایت هیدرولیکی

پارامتر	مقدار تغییر یافته	تغییر متوسط در پیشروی (H)	تغییر متوسط در پیشروی (LS)	تغییر متوسط در پیشروی (SS)
K	-20	-9% (افزایش پیشروی)	-10% (افزایش پیشروی)	-8% (افزایش پیشروی)
K	+20	-8% (کاهش پیشروی)	-9% (کاهش پیشروی)	-7% (کاهش پیشروی)

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

نفوذ آب شور در سفره‌های آب ساحلی یک پدیده طبیعی است که می‌تواند به دلیل تغییرات جهانی باعث افزایش تخریب کیفیت آب زیرزمینی شود. این مطالعه به‌صورت عددی کارایی راه‌حل مدیریتی آب‌بند را از نظر دفع نمک و پیشروی آب شور را با استفاده از مدل سفره آب ساحلی هنری ارزیابی کرده است. سفره‌های آب ساحلی یا بخشی از آن‌ها که دارای شیب جانبی بستر هستند، نسبت به موارد کنار دریا و شیب افقی بستر، بیشتر مستعد پیشروی آب شور خواهند بود. لذا بررسی راهکار مدیریتی جهت حفظ کیفیت آب نواحی ساحلی از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مطالعه به بررسی ۳ نوع شیب بستر آبخوان ساحلی تحت ۴ سناریو مختلف (عمق‌های مختلف دیوار آب‌بند) با استفاده از مدل عددی بدون شبکه پتروگالرکین (MLPG) مورد بررسی قرار گرفت. در پایان نیز مدل حاضر با مدل مطالعه‌ی آقای Abd-Elaty و Polemio (۲۰۲۳) مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج حاصل نشان داده است که مدل مورد استفاده در این مطالعه از دقت و کارایی خوبی برخوردار بوده است و با توجه به سرعت بالای مدل‌سازی می‌تواند به‌عنوان یک راهکار مدیریتی جهت حفظ وقت و سرمایه در تحقیقات اولیه در اهداف واقعی مورد استفاده قرار گیرد. از محدودیت‌های مدل می‌توان به عدم وجود داده‌های میدانی جهت مقایسه تجربی اشاره کرد.

هیچگونه تعارض منافع بین نویسندگان وجود ندارد.

منابع

- عطائی آشتیانی؛ بهزاد، حسین آبادی، حمیدرضا و فاطمی، سیداحسان. (۱۳۸۵). مدل عددی انتقال و تخلیه آلاینده‌ها از آبخوان ساحلی به دریا. فصلنامه تحقیقات منابع آب ایران، ۲ (۱)، ۱۷-۱.
- کریم زاده؛ الهام، اکبرپور، ابوالفضل و محتشمی، علی. (۱۴۰۳). شبیه‌سازی نفوذ آب دریا در سفره آب ساحلی با استفاده از روش عددی MLPG. مجله آبخوان و قنات، ۵ (۸)، ۴۴-۱۹.
- شکری، ناصر. و همایون، سید رحمان (۱۳۹۲). ارزیابی روش‌های حل معادله انتقال پخش (Advection Diffusion) به روش احجام محدود (Finite Volume). دوازدهمین کنفرانس هیدرولیک ایران، کرج.

REFERENCES

- Ataie- Ashtiani, B., Hosseinabadi, H. R., & Fatemi, E. (2006). Numerical model of Transport and Contaminant Discharge from Coastal Aquifers into Seaward. *Iran- water resources research*, 2(1), 1-17. (In Persian).
- Abd-Elaty, I., Hany, FA., & Nezhad, M. (2019). Numerical analysis of physical barriers systems efficiency in controlling saltwater intrusion in coastal aquifers. *Environ Sci Pollut Res*, 26(35):35882–35899.



<https://doi.org/10.1007/s11356-019-06725-3>.

- Abd-Elaty, I., Saleh, OK., Ghanayem, H.M., Grischek, T., & Zelenakova, M. (2021). Assessment of hydrological, geohydraulic and operational conditions at a riverbank filtration site at Embaba, Cairo using flow and transport modeling. *Journal of Hydrology: Regional Studies*, 37(8), 100900. <https://doi.org/10.1016/j.ejrh.2021.100900>
- Abd-Elaty, I., & Zelenakova, M. (2022). Saltwater intrusion management in shallow and deep coastal aquifers for high aridity regions. *Journal of Hydrology: Regional Studies*, 40:101026, DOI:<https://doi.org/10.1016/j.ejrh.2022.101026>
- Abd-Elaty, Il., & Polemio, M. (2023). Saltwater intrusion management at different coastal aquifers bed slopes considering sea level rise and reduction in fresh groundwater storage, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 37:2083–2098
- Abdoulhalik, A., Ahmed, A. & Hamill, G. (2017) A new physical barrier system for seawater intrusion control. *Journal of Hydrology*, 549, 416–427. [[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EE.1943-7870.0001194](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EE.1943-7870.0001194)]
- Armanuos, A., El-Morshedy, A., & Hassan, H. (2020). Optimization of subsurface wall depth for landfill leachate management. *Waste Management*, 102, 123–135. [<https://doi.org/10.1016/j.wasman.2019.10.041>].
- Armanuos, A.M., Al-Ansari, N., & Yaseen, Z.M. (2020). Underground barrier wall evaluation for controlling saltwater intrusion in sloping unconfined coastal aquifers. *Water*. 12, 2403.
- Allow, KA. (2012). The use of injection wells and a subsurface barrier in the prevention of seawater intrusion: a modelling approach. *Arab Journal Geosci*. 5(5), 1151–1161.
- Atluri, S. N. (2004). The meshless method (MLPG) for domain & BIE discretizations. *Tech Science Press*. <https://engineering.uci.edu/>
- Bear, J., Cheng, A.H., Sorek, S., Quazar, D., & Herrera, I. (1999). Seawater intrusion in coastal aquifers, concepts, methods and practices. *Kluwer Academic publisher*, Dordrecht.
- Diersch, H.J. (1988). Finite element modelling of recirculating density-driven saltwater intrusion processes in groundwater. *Advances in Water Resources*, 11(1), 25–43.
- El Shinawi, A., Kuriqi, A., Zelenakova, M., Vranayova, Z., & Abd-Elaty, I. (2022). Land subsidence and environmental threats in coasta aquifers under sea level rise and over-pumping stress. *Journal of Hydrology*, 608, 127607. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2022.127607>
- Hans, J., & Diersch, G. (2014). Finite element modeling of flow mass and heat transport in porous and fractured media, springer.
- Hughes, JD., & Sanford, WE. (2004). SUTRA-MS: a version of sutra modified to simulate heat and multiple-solute transport, 1207. Open-File Report 1207.
- Singh, A. (2012). An overview of the optimization modelling applications. *Journal of Hydrology*, 5, 466–467. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol>
- Harbaugh, AW., Banta, ER., Hill, MC., & McDonald, MG. (2000). MODFLOW-2000, the U.S. Geological survey modular ground-water model—user guide to modularization concepts and the groundwater flow process: U.S. Geological Survey Open-File Report 00–92, p 121.
- IPCC. (2021). The IPCC has finalized the first part of the sixth assessment report, climate change 2021: the physical science basis, the working group i contribution to the sixth assessment report. It was finalized on 6 August 2021 during the 14th Session of Working Group I and 54th Session of the IPCC.
- IPCC. (2014). Climate change 2014: synthesis report. In: Core WritingTeam, R.K. Pachauri and L.A. Meyer (eds.) Contribution of working groups I, II and III to the fifth assessment report of the intergovernmental panel on climate change. IPCC, Geneva, Switzerland, pp 151.
- IPCC. (2007). An Assessment of the Intergovernmental Panel on Climate Change. Adopted section by section at IPCC Plenary XXVII (Valencia, Spain, 12–17 November 2007), represents the formally agreed statement of the IPCC concerning key findings and uncertainties contained in the Working Group contributions to the Fourth Assessment Report.
- Javadi, A., Hussain, M., Sherif, Mohsen., & Farmani, Raziye., (2015). Multi-objective Optimization of Different Management Scenarios to Control Seawater Intrusion in Coastal Aquifers. *Water Resour Manage*, 29, 1843–1857, DOI 10.1007/s11269-015-0914-1.
- Karim zadeh, E. Akbarpour. A. Mohtashami, A. (2024). Simulation of sea water infiltration in coastal aquifer using MLPG numerical method. *Journal of Aquifer and Qanat*, 5(8), 44-19. <https://doi.org/10.22077/jaaq.2024.8115.1076>.(In Persian).
- Liu, G. R., & Gu, Y. T. (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*. Springer. <https://link.springer.com/>

- Li, L., Barry, D. A., Stagnitty, F. and Parlange, J. Y. (1999). Submarine Ground Water Discharge and Associated Chemical Input to a Coastal Sea. *Water Resources Research.*, 35 (11). 3253-3259.
- Liu, W.K., Jun, S., & Zhang, Y.F. (1995). Mesh free methods, CRC PRESS, Boca Raton, London, NewYork, Washington, D.C.
- Moore, W. S. (1996). Large Ground Water Inputs to Coastal Waters Revealed by Ra226 Enrichment, *Nature*, 380, pp. 612-614.
- Mazzia, A., and Putti, M. (2002). Mixed-finite element and finite volume discretization for heavy brine simulations in groundwater, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 147, 1, 191-213.
- Mohamed, A., Abu-Bakr, H.A.-A., Farag, M.M., Taher, M.H., Mohamed, H.G., & Ahmed, G. (2023). Hydrogeophysical and Hydrochemical Assessment of the Northeastern Coastal Aquifer of Egypt for Desalination Suitability. *Water*, 15, 423.
- McDonald, R.I., Green, P., Balk, D., Fekete, B.M., Revenga, C., Todd, M., & Montgomery, M. (2011). Urban growth, climate change, and freshwater availability. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 108, 6312–6317. <https://doi.org/10.1073/pnas.1011615108>.
- Omajene, A., Egbai J. C., & Okolie E. C., (2024)..Investigation of Saltwater Intrusion into Freshwater Aquifers in Some Estuary Environment in Niger Delta, *Journal of Water Resources and Ocean Science*, 13(4), 94-104, DOI:10.11648/j.wros.20241304.11.
- Polemio, M., & Zuffiano, L.E. (2020). Review of utilization management of Groundwater at risk of salinization. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 146(9), 20. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)WR.1943-5452.0001278](https://doi.org/10.1061/(ASCE)WR.1943-5452.0001278).
- Rastogi, A. K., Choi, G. W., & Ukarande, S. K. (2004). Diffused interface model to prevent ingress of seawater in multi-layer coastal aquifers, *Journal of Special Hydrology*, 1-31.
- Roger, L.J., Kazuro, M., Kei, N. (2010). Effects of artificial recharge and flow barrier on seawater intrusion. *Journal of Ground Water*. <https://doi.org/10.1007/s00477-023-02381-9>.
- Shokri, N., & Homayoun, S. R. (2013). Evaluation of methods for solving the advection diffusion equation using the finite volume method, *12th Iranian Hydraulic Conference*, Karaj, <https://civilica.com/doc/379534>. (In Persian).
- Sun, Q., Zheng, T., Zheng, X., & Walther, M. (2021). Effectiveness and comparison of physical barriers on seawater intrusion and nitrate accumulation in upstream aquifers. *Journal of Contaminant Hydrology*, 243, 103913 <https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2021.103913>.
- Voss, C.I. & Provost, A.M. (2010). SUTRA-A model for saturated-unsaturated variable-density ground-water flow with solute or energy transport. Report 02–4231.
- Wada, Y., Flo'rke, M., Hanasaki, N., Eisner, S., Fischer, G., Tramberend, S., Satoh, Y., Van Vliet M.T.H., Yillia, P., Ringler, C. & et al. (2016). Modeling global water use for the 21st century: the water futures and solutions (WFaS) initiative and its approaches. *Geoscientific Model Development*, 9:175–222. <https://doi.org/10.5194/gmd-9-175-2016>.
- Yang, J., Graf, T., Luo, J. & Lu, C., (2021). Effect of cutoff wall on freshwater storage in small islands considering ocean surge inundation. *Journal of Hydrology*. 603, 127143. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127143>.
- Yu. Ye., Chiogna, G., Cirpka, O., Grathwohl, P., & Rolle, M. (2015). Experimental Investigation of Compound Specific Dilution of Solute Plumes in Saturated Porous Media: 2-D vs. 3-D Flow-Through Systems. *Journal of Contaminant Hydrology*, 172, 33-47.
- Zheng, C., & Wang, P.P. (1999) MT3DMS, a modular three-dimensional multi species transport model for simulation of advection, dispersion and chemical reactions of contaminants in groundwater systems: documentation and user's guide. U.S. Army Engineer Research and Development Center Contract Report SERDP-99-1, Vicksburg, MS, pp 202.