



Modeling of Type B hydraulic jump characteristics and comparative analysis focusing on sequent depth ratio, energy loss, and effect of sill installation under laboratory conditions

Marzieh Aliolad¹ | Alireza Vatankhah²

1. Department of Irrigation and Reclamation Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran. E-mail:

marzieh.aliolad@ut.ac.ir

2. Corresponding Author, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, University of Tehran, Tehran,

Iran. E-mail: arvaran@ut.ac.ir

Article Info	ABSTRACT
Article type: Research Article	This study analyzes Type B hydraulic jumps in rectangular channels with and without downstream sills, proposing improved formulas for sequent depth and energy loss. Experiments were conducted under controlled tailwater depth conditions. Experimental results demonstrated that previous models based on the momentum principle had a Mean Absolute Percentage Error (MAPE) between 20% and 30%, whereas the empirical relationship proposed by Carollo et al. (2011) performed better, with a MAPE of less than 5%. A new relationship with a MAPE of about 4% was introduced for predicting the sequent depth ratio. As the Froude number increased from 7.8 to 13, the sequent depth ratio increased from 12 to 23.5. The energy loss of the jump varied between 60% and 80% with the increase in the Froude number. The new model demonstrated a MAPE of 1.7% in predicting energy loss, performing better than previous established models such as Hager (1992). The installation of a sill near the slope change area increased turbulence and the sequent depth ratio; however, the energy dissipation in this range was low and the performance was not optimal. With the sill located at 1.4 to 3 channel widths, the flow achieved hydrostatic conditions, resulting in the target energy loss of 65% to 80%. The optimal sill height was determined to be approximately 10 cm. Installing the sill at the relative position of 1.4 times the channel width resulted in the formation of an optimal stilling basin, suitable energy loss, and optimization of the structure's dimensions.
Article history:	
Received: Sep. 18, 2025	
Revised: Oct. 31, 2025	
Accepted: Nov. 10, 2025	
Published online: Jan. 2026	
Keywords: <i>Type B hydraulic jump, Sequent depth ratio, Momentum principle, Energy dissipation, Froude number.</i>	
Cite this article: Aliolad, M., Vatankhah, A. (2026) Modeling of Type B hydraulic jump characteristics and comparative analysis focusing on sequent depth ratio, energy loss, and effect of sill installation under laboratory conditions, <i>Iranian Journal of Soil and Water Research</i>, 56 (11), 2951-2967 https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402484.670008 © The Author(s). Publisher: University of Tehran Press. DOI: https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402484.670008	



EXTENDED ABSTRACT

Introduction

A novel momentum-based model is introduced for the prediction of B-type hydraulic jumps occurring on positive slopes in the presence of submerged downstream obstacles. Experimental data confirm that the model enhances predictive accuracy for both the sequent depth ratio and energy dissipation, overcoming key shortcomings of prior empirical methods.

Method

This study experimentally investigated B-type hydraulic jumps in a rectangular flume with a 45° inclined plate (choute) and downstream gate, measuring key flow parameters under varying conditions. A momentum balance method with a sill correction factor was employed to predict sequent depth ratios, integrating experimental and theoretical analyses to assess the impact of geometry and control structures on B-type jumps.

Results

This study evaluates models for Type B hydraulic jumps without sills. Traditional momentum-based models were inaccurate, with a 20–30% MAPE for sequent depth ratio. While Carollo et al.'s empirical model reduced this error to 5%, our proposed Traditional momentum-based formula, featuring an empirical coefficient ($K=1$), achieves a further improvement to 4.5% MAPE. Additionally, it precisely predicts energy dissipation rates of 60–80% with a MAPE of 1.7%. A secondary finding demonstrates that sill installation at specific heights and locations optimizes dissipation and stabilizes flow conditions.

Conclusions

This research developed a new momentum-based equation that accurately predicts both the sequent depth ratio and energy dissipation for Type B hydraulic jumps under varying tailwater and sill configurations, achieving MAPEs of approximately 4.5% and 1.7%, respectively. Findings indicate that higher initial Froude numbers raise the sequent depth ratio and energy dissipation, while optimal sill placement-between 1.4 and 2.2 from the slope change area-improves energy dissipation and reduces the size of stilling basins, promoting more efficient hydraulic design.

Author Contributions

All authors contributed equally to the conceptualization of the article and writing of the original and subsequent drafts.

Data Availability Statement

Data available on request from the authors.

Acknowledgements

The authors would like to thank all participants of the present study.

Ethical considerations

The authors avoided data fabrication, falsification, plagiarism, and misconduct.

Conflict of interest

The author declares no conflict of interest.

مدل سازی ویژگی های پرش هیدرولیکی نوع B و تحلیل تطبیقی با تمرکز بر نسبت اعماق ثانویه، اتلاف انرژی و تأثیر استقرار آستانه در شرایط آزمایشگاهی

مرضیه علی اولاد^۱ | علیرضا خواه^۲

۱. گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: marzieh.aliolad@ut.ac.ir

۲. نویسنده مسئول، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، تهران، ایران. رایانامه: arvatan@ut.ac.ir

اطلاعات مقاله	چکیده
نوع مقاله: مقاله پژوهشی	این پژوهش به بررسی جامع پرش هیدرولیکی نوع B در کانال مستطیلی با شرایط بدون آستانه و نصب آستانه های مختلف پرداخته است. آزمایش ها با کنترل عمق پایاب انجام شد تا پارامترهایی مانند نسبت عمق ثانویه به اولیه، طول ناحیه غلتان و اتلاف انرژی تحلیل شوند. نتایج نشان داد مدل های قبلی مبتنی بر اصل مونتوم دارای میانگین درصد خطای مطلق (MAPE) بین ۲۰ تا ۳۰ درصد بودند، در حالی که رابطه تجربی پیشنهادی (Carollo et al. (2011) با MAPE کمتر از ۵ درصد عملکرد بهتری داشت. در این مطالعه، رابطه جدیدی با MAPE حدود ۴ درصد برای پیش بینی نسبت عمق ثانویه معرفی شد. همچنین رابطه مستقیمی بین عدد فرود اولیه و نسبت عمق ثانویه مشاهده شد، به گونه ای که با افزایش عدد فرود از ۷/۸ به ۱۳، نسبت عمق ثانویه از ۱۲ به ۲۳/۵ افزایش یافت. اتلاف انرژی پرش نیز با افزایش عدد فرود بین ۶۰ تا ۸۰ درصد تغییر می کرد. مدل جدید در پیش بینی اتلاف انرژی دارای MAPE ۱/۷ درصد بود و بهتر از مدل های قدیمی مانند Hager (1992) بود. تحلیل طول ناحیه غلتان با یافته های پیشین منطبق بود. در این تحقیق، تأثیر نصب آستانه در پایین دست نیز بررسی شد؛ نصب آستانه در ناحیه ای نزدیک به محل تغییر شیب (بین ۰/۱ تا ۰/۵ برابر عرض کانال) موجب افزایش آشفتگی و نسبت عمق ثانویه می شود، اما اتلاف انرژی در این بازه کم بوده و کارایی مطلوبی ندارد. با جابجایی آستانه به موقعیت نسبی ۱/۴ تا ۳ برابر عرض کانال، جریان به شرایط هیدرواستاتیک نزدیک شده و اتلاف انرژی در محدوده مطلوب ۶۵ تا ۸۰ درصد قرار گرفت. ارتفاع بهینه آستانه حدود ۱۰ سانتی متر تعیین شد. نصب آستانه در موقعیت نسبی ۱/۴ برابر عرض کانال منجر به شکل گیری حوضچه آرامش بهینه، اتلاف انرژی مناسب و بهینه سازی ابعاد سازه گردید.

استناد: علی اولاد؛ مرضیه، وطن خواه؛ علیرضا (۱۴۰۴) مدل سازی ویژگی های پرش هیدرولیکی نوع B و تحلیل تطبیقی با تمرکز بر نسبت اعماق ثانویه، اتلاف انرژی و تأثیر استقرار آستانه در شرایط آزمایشگاهی، مجله تحقیقات آب و خاک ایران، ۵۶ (۱۱)، ۲۹۶۷-۲۹۵۱.



<https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402484.670008>

© نویسنده گان.

ناشر: مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران.

DOI: <https://doi.org/10.22059/ijswr.2025.402484.670008>



مقدمه

پرش هیدرولیکی، گذار جریان از حالت فوق بحرانی به زیر بحرانی با افزایش عمق و اتلاف انرژی است که کاربرد مهمی در کنترل انرژی و هوادهی در سازه‌های هیدرولیکی دارد. برای کنترل انرژی جنبشی زیاد جریان خروجی، حوضچه‌های آرامش با طراحی مناسب و سازه‌های کنترل جریان استفاده می‌شوند که موجب کاهش طول حوضچه می‌گردد. پرش‌های هیدرولیکی در کانال‌های شیبدار براساس محل تشکیل روی سطوح مختلف به انواع A تا F تقسیم شده‌اند (Kindsvater, 1944 و Rajaratnam, 1966). پرش نوع B که در این پژوهش بررسی شده، پرشی اجباری، مستغرق و ناشی از مانع پایین‌دست کانال است که ابتدای پرش روی شیب مثبت و انتهای آن روی شیب افقی قرار می‌گیرد.

Beirami & Chamani, (2006) ویژگی‌های پرش هیدرولیکی روی شیب‌های افقی و معکوس در انتهای سرریز استاندارد اوجی را مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه رابطه نیمه‌نظری **Error! Reference source not found.** برای پیش‌بینی نسبت اعماق ثانویه در پرش هیدرولیکی نوع B ارائه شد که در آن $CF = F_1^2 N_1 / r$ ضریبی است که اثر نیروی گریز از مرکز در بخش ورودی را نشان می‌دهد و عدد فرود ورودی (F_1) را به شعاع نسبی (r/N_1) مرتبط می‌سازد، r شعاع انحناء در محل تغییر شیب کانال، $Y = h_2/h_1$ نسبت اعماق ثانویه، h_1 ارتفاع نظیر فشار در مقطع اولیه پرش، h_2 ارتفاع نظیر فشار در مقطع ثانویه پرش، z_1 تراز کف کانال در مقطع اولیه پرش، F_1 عدد فرود اولیه که از رابطه $F_1 = (q^2 / (g N_1^3 \cos \theta))^{0.5}$ محاسبه می‌شود، N_1 عمق جریان فوق‌بحرانی عمود بر کف شوت و θ زاویه کف سرریز نسبت به افق می‌باشد.

$$Y = \left[1 + CF + \frac{z_1}{h_1} (1 + CF + Y) + 2F_1^2 \left(1 - \frac{1}{Y \cos^2 \theta} \right) \right]^{0.5} \quad \text{رابطه ۱}$$

Hager, (1988) رابطه ۲ را برای تخمین نسبت اعماق ثانویه ارائه داد. در این رابطه E پارامتر بی‌بعد مربوط به محل قرارگیری پنجه پرش است که توسط Hager, (1988) معرفی شده و از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$Y = 23.5(1 + 1.5E)^{-2} + \frac{\sqrt{2}(F_1 - 3)}{\tanh(2.5E)} \quad \text{رابطه ۲}$$

رابطه ۳ برای $3 \leq F_1 \leq 11$ ، $\alpha = 45^\circ$ و $0.05 \leq E \leq 0.9$ صادق و در آن E به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E = \frac{h_2 - z_1}{h_2} \quad \text{رابطه ۳}$$

Ohtsu & Yasuda, (1990, 1991) دامنه وسیعی از شیب کانال ($0^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$) را برای برآورد اعماق ثانویه مورد بررسی قرار داده و رابطه نیمه‌نظری ۴ را ارائه دادند. در این رابطه h_2^* عمق ثانویه زیر بحرانی مربوط به عمق N_1 در پرش کلاسیک است که توسط Bradley & Peterka, (1957) گسترش یافته و از رابطه $h_2^* = [0.5 N_1 (-1 + (1 + 8 F_1^{*2})^{0.5})]$ محاسبه می‌شود، F_1^* عدد فرود ورودی در پرش کلاسیک بوده و از رابطه $F_1^* = (q^2 / g N_1^3)^{0.5}$ برآورد می‌شود و l فاصله افقی بین پنجه پرش و محل تغییر شیب کانال است که از رابطه تجربی زیر محاسبه می‌شود. این رابطه برای محدوده $6 \leq F_1 \leq 14$ و $1.1 \leq h_2/h_2^* \leq 3$ صادق است.

$$\frac{l}{h_2^*} = \left[\frac{2.3}{(\tan \alpha)^{0.73}} - 0.8 \right] \left(\frac{h_2}{h_2^*} - 1 \right)^{0.75} \quad \text{رابطه ۴}$$

Hager, (1992) رابطه ۵ را برای تخمین نسبت h_2/h_2^* ارائه داد که در بازه $h_2/h_2^* > 1.3$ معتبر است. همچنین وی تأیید کرد که برای مقادیر کوچک h_2/h_2^* ، هنگامی که l/h_2^* به سمت صفر تمایل دارد، منحنی‌های متناسب با مقادیر تجربی h_2/h_2^* و l/h_2^* به سمت $h_2/h_2^* = 0.98$ متمایل می‌شوند. بنابراین زمانی که پنجه پرش در نزدیکی محل تغییر شیب قرار دارد، نسبت اعماق ثانویه h_2/N_1 کمتر از رابطه Bradley & Peterka, (1957) است.

$$\frac{h_2}{h_2^*} = 0.92 + \tan \alpha \left(\frac{l}{h_2^*} - 1 \right) \quad \text{رابطه ۵}$$

Kawagoshi & Hager, (1990) رابطه تجربی ۶ را برای برآورد نسبت اعماق ثانویه ارائه دادند. این رابطه برای $30^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$ صادق

است.

$$Y = 3.75 E^{-\tan \alpha} + \frac{\sqrt{2}(F_1 - 3)}{\tanh(3.5 E \cos \alpha)} \quad \text{رابطه ۶}$$

Carollo et al., (2011) برخی روابط ارائه شده برای پرش نوع B در مطالعات گذشته را مورد آزمایش قرار دادند. در میان این روابط، رابطه ۴ (ارائه شده توسط (Ohtsu & Yasuda, (1990, 1991) بیشترین تطابق را با داده‌های اندازه‌گیری شده داشت. در نهایت از طریق تحلیل ابعادی، رابطه تجربی ۷ برای تخمین نسبت عمق‌های ثانویه توسط (Carollo et al., (2011) گسترش یافت که این معادله منجر به حصول کمترین میزان خطا (۵ درصد) نسبت به سایر روابط شد.

$$\gamma = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{\tan \alpha}{8.42}\right) E^{-[0.181/(\tan \alpha)^{0.663}]} (F_1 - 1)^{0.963} + \frac{1}{E} \quad (\text{رابطه ۷})$$

Hager et al., (1986) شرایط شروع پرش را در یک آستانه مستطیلی پیوسته بررسی کردند. در این مطالعه با کاربرد اصل اندازه حرکت در جهت طولی، پرش اولیه بررسی شد. با فرض جریان بحرانی در حداکثر بالآمدگی آب، رابطه ۸ جهت برآورد ارتفاع آستانه به‌صورت تابعی از عدد فرود اولیه ارائه شد. در این رابطه S ارتفاعی نسبی آستانه بوده و از رابطه s/h_1 محاسبه می‌شود و C_D ضریب درگ می‌باشد.

$$S = \frac{1 + 2F_1^2 - \frac{5}{2}F_1^{4/3}}{C_D F_1^2} \quad (\text{رابطه ۸})$$

در پژوهشی از (Singh and Roy (2022 نشان داده شد که استفاده از صفحه‌های مشبک چندلایه با منافذ مختلف، انرژی جریان‌های فوق بحرانی را به طور موثری کاهش داده و اتلاف انرژی تا ۹۴ درصد افزایش می‌یابد. این روش نسبت به پرش هیدرولیکی کلاسیک کارایی بهتری دارد و شکل منافذ در بهبود پایداری جریان مؤثر است.

در تحقیق (Khanahmadi et al. (2022 با مدل‌سازی عددی و آزمایشگاهی، مشخص شد پرش هیدرولیکی نوع T روی بستر زبر باعث کاهش حدود ۳۰ درصدی عمق ثانویه و کاهش طول پرش می‌شود. این نتایج در طراحی حوضچه‌های آرامش کاربرد مهمی دارند. افزایش زبری و زاویه انشعاب، طول غلتان پرش را کاهش می‌دهد و با داده‌های تجربی تطابق خوبی دارد.

(Macián-Pérez et al. (2023 با استفاده از مدل‌سازی عددی CFD بر پرش هیدرولیکی در کف‌های منفی تمرکز کردند که نشان داد نصب آستانه منفی موجب کاهش ابعاد حوضچه آرامش و افزایش بهره‌وری اتلاف انرژی می‌شود.

(Rasoul et al. (2024 با استفاده از مدل‌های آزمایشگاهی مختلف، اثر زبری پله‌ها بر رفتار پرش هیدرولیکی و اتلاف انرژی در سرریزهای پلکانی را بررسی کردند. نتایج نشان داد که زبری پله‌ها ضمن کاهش طول پرش و ناحیه غلتان تا حدود ۳۵ درصد، موجب افزایش راندمان اتلاف انرژی به میزان حدود ۲۱ درصد در مقایسه با پله‌های صاف می‌شود.

مطالعه (Elshaarawy et al. (2025 با استفاده از مدل‌های پیشرفته یادگیری ماشین به‌ویژه XGBoost و CatBoost، طول ناحیه غلتان پرش هیدرولیکی روی بستر زبر را با دقت بالا پیش‌بینی کرده است. نتایج نشان‌دهنده اهمیت پارامترهای نسبت عمق و زبری بستر در عملکرد مدل‌ها است.

پرش هیدرولیکی نوع B به دلیل اهمیت در طراحی سازه‌های هیدرولیکی، به ویژه حوضچه‌های آرامش، مورد توجه پژوهشگران است. پیچیدگی پدیده و تأثیر عوامل متعدد، مدل‌سازی دقیق آن را چالش برانگیز کرده است. روابط پیشین به دلیل خطاهای بالا و وابستگی به ضرایب تجربی، در شرایط مختلف دقت کافی ندارند. این مطالعه با استفاده از اصل مومنتوم و داده‌های آزمایشگاهی، رابطه‌ای جدید برای بهبود دقت پیش‌بینی پرش نوع B ارائه داده و عملکرد مدل‌های قبلی را ارزیابی کرده است. اگرچه روابط متعددی برای پیش‌بینی نسبت اعماق ثانویه در پرش هیدرولیکی نوع B در شرایط بدون آستانه ارائه شده است، اما توسعه‌ی روابط برای برآورد نسبت اعماق ثانویه و طول ناحیه غلتان، خصوصاً برای پرش هیدرولیکی نوع B در حضور آستانه پایین‌دست، همچنان ناقص و نیازمند بررسی است.

روش تحقیق

تجهیزات آزمایشگاهی مورد استفاده در تحقیق حاضر

در این پژوهش، آزمایش‌های تجربی روی پرش هیدرولیکی نوع B در کانالی مستطیلی با ابعاد ۱۲ متر طول، ۲۵ سانتی‌متر عرض و ۶۰ سانتی‌متر ارتفاع در آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه تهران انجام شد. جریان فوق‌بحرانی توسط شوتی با شیب ۴۵ درجه ایجاد و پرش

هیدرولیکی با کنترل دبی از طریق دریچه مستطیلی در پایین دست کانال شکل گرفت. عمق‌های اولیه و ثانویه پرش با استفاده از پیزومتر (شکل ۱) و point gage اندازه‌گیری شد. به دلیل پیچیدگی‌های نظری و ناپایداری جریان، طول پرش به طور مستقیم قابل اندازه‌گیری نبود؛ به همین دلیل، از ذرات یونولیت برای تعیین طول غلتاب (L_T) به عنوان شاخصی دقیق‌تر برای منطقه آشفته پرش استفاده شد. تغییرات کوچک در دبی، حرکت قابل توجه پرش به سمت بالادست را به دنبال داشت. دامنه تغییر دبی محدود بود و عمق پایاب با دریچه پایین دست تنظیم شد (شکل ۲). همچنین برای تثبیت پرش هیدرولیکی، از آستانه‌هایی با ارتفاع‌های مختلف ۶، ۱۰ و ۱۵ سانتی‌متر و عرض ۲۴/۷ سانتی‌متر بر روی قسمت افقی کانال استفاده شد (شکل ۳).



شکل ۱. نمایی از پیزومترهای نصب شده در کف کانال



شکل ۲. نمایی از پرش هیدرولیکی نوع B در حالت عدم وجود آستانه



شکل ۳. نمایی از پرش هیدرولیکی نوع B در حالت وجود آستانه‌ای به ارتفاع ۱۰ سانتی‌متری به فاصله نسبی ۳ از محل تغییر شیب

روش انجام آزمایش

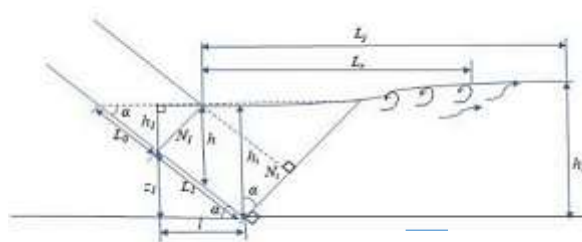
هدف این تحقیق، بررسی تأثیر ارتفاع آستانه بر ویژگی‌های پرش هیدرولیکی نوع B است. برای این منظور، در هر مرحله ابتدا یک پیکربندی مشخص تنظیم شده و پس از اندازه‌گیری مشخصات پرش، تغییر داده می‌شد. یک صفحه با شیب ۴۵ درجه و ارتفاع ۰/۸ متر نسبت به کف فلوم نصب شد و آستانه‌هایی با ارتفاع‌های ۸/۵، ۱۰ و ۱۵ سانتی‌متر در فواصل نسبی ۰/۱، ۰/۵، ۰/۸۶، ۱/۴، ۲/۲ و ۳ برابر عرض کانال از محل تغییر شیب در کف حوضچه قرار گرفتند. دبی‌های ورودی از ۲ تا ۱۵ لیتر بر ثانیه متغیر بودند. مراحل انجام تحقیق شامل تنظیم شیب صفحه و عمق پایاب برای کنترل شرایط پرش، نصب آستانه و اندازه‌گیری پارامترهای پرش، تغییر ارتفاع آستانه و ثبت پارامترها، و تغییر موقعیت آستانه نسبت به محل تغییر شیب و بررسی تأثیر آن بر مشخصات پرش بود.

نتایج و بحث

ارزیابی ویژگی‌های پرش هیدرولیکی نوع B در شرایط پایه (بدون آستانه)

شکل ۴ نمایی کلی از پرش نوع B را نمایش می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود h عمق جریان اندازه‌گیری شده در جهت نیروی

گرانش در ابتدای پرش، h_1 و h_i به ترتیب ارتفاع نظیر فشار آب در ابتدا و انتهای پرش هیدرولیکی، h_2 عمق جریان زیر بحرانی پایین‌دست، N_i و N_1 به ترتیب عمق جریان فوق بحرانی عمود بر کف کانال در ابتدا و انتهای پرش، Z_1 ارتفاع کف در محل شروع پرش هیدرولیکی، L_0 فاصله ابتدای پرش هیدرولیکی تا محل شروع پرش و در جهت شیب کانال، L_1 فاصله ابتدای پرش هیدرولیکی تا محل تغییر شیب و در جهت شیب کانال، l فاصله افقی محل شروع پرش تا محل تغییر شیب کانال، L_r طول ناحیه غلتان پرش هیدرولیکی، L_j یا طول پرش که عبارت است از فاصله افقی ابتدای پرش تا محلی که سطح آب تقریباً افقی می‌شود و α زاویه سرریز با افق است.



شکل ۴. نمایی از مشخصات هیدرولیکی و هندسی پرش هیدرولیکی نوع B

به دلیل ماهیت کاملاً تجربی رابطه Carollo et al., (2011) (Error! Reference source not found.) و خطای زیاد ناشی از کاربرد روابط نیمه‌نظری موجود، گسترش رابطه‌ای بر مبنای اصل مومنتوم که کمترین میزان خطا را در تخمین نسبت اعماق ثانویه نسبت به سایر روابط داشته باشد نیاز است. با توجه به شکل ۴ و با نوشتن اصل مومنتوم در جهت افقی، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$P_1 - P_2 + w \sin \alpha - F_f = \frac{\gamma q}{g} (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1 \cos \alpha) \quad \text{رابطه ۹}$$

که در این رابطه $P_1 = 0.5 \gamma N_1^2 (\cos \alpha)^2$ نیروی فشاری در مقطع شروع پرش، $P_2 = 0.5 \gamma h_2^2$ نیروی فشاری در مقطع ثانویه پرش، F_f نیروی برشی، $q = v_1 N_1$ بده در واحد عرض کانال، v_1 سرعت در مقطع اولیه پرش، $v_2 = v_1 N_1 / h_2$ سرعت در مقطع ثانویه پرش می‌باشند. در این تحقیق از اثر نیروی برشی صرف نظر و ضرایب β_1 و β_2 برابر واحد فرض شده است. w نیز نیروی افقی وارد از طرف کف سطح شیبدار بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$w = \frac{1}{2} \gamma K L_1 (N_1 + N_i) \cos \alpha \quad \text{رابطه ۱۰}$$

در این رابطه γ وزن مخصوص آب، K ضریبی است که به عنوان تفاوت بین شکل پروفیل خطی و واقعی سطح آب بین مقطع شروع پرش و مقطع تغییر شیب کانال معرفی می‌شود که با توجه به مشاهدات آزمایشگاهی پروفیل سطح آب از محل شروع پرش تا محل تغییر شیب تقریباً خطی و افقی بوده و مقدار این ضریب واحد فرض می‌شود، بنابراین l و L_1 به ترتیب از رابطه $z_1 / \tan \alpha$ و $z_1 / \sin \alpha$ به دست می‌آیند. به دلیل کوچک بودن مقدار L_0 از آن صرف نظر شده و N_i از رابطه $L_1 \tan \alpha$ محاسبه می‌شود. با جایگذاری پارامترها در رابطه ۹ به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} \gamma N_1^2 \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \gamma h_2^2 + w \sin \alpha = \rho q \left(\frac{q}{h_2} - \frac{q}{N_1} \cos \alpha \right) \quad \text{رابطه ۱۱}$$

با ضرب کردن دو طرف رابطه ۱۱ در h_2 رابطه ۱۲ حاصل می‌شود:

$$-\frac{1}{2} \gamma h_2^3 + \left[\frac{1}{2} \gamma N_1^2 \cos^2 \alpha + w \sin \alpha + \frac{\rho q^2 \cos \alpha}{N_1} \right] h_2 - \rho q^2 = 0 \quad \text{رابطه ۱۲}$$

با تقسیم کردن دو طرف رابطه ۱۲ بر $\gamma/2$ رابطه ۱۳ به دست می‌آید:

$$h_2^3 + \left[-N_1^2 \cos^2 \alpha - \frac{2}{\gamma} w \sin \alpha - \frac{2q^2 \cos \alpha}{N_1 g} \right] h_2 + \frac{2q^2}{g} = 0 \quad \text{رابطه ۱۳}$$

با جایگذاری عدد فرود اولیه $F_1^2 = q^2 / (g N_1^3 \cos \theta)$ در رابطه ۱۳، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$h_2^3 + \left[-N_1^2 \cos^2 \alpha - \frac{2}{\gamma} w \sin \alpha - 2F_1^2 N_1^2 \cos^2 \alpha \right] h_2 + 2F_1^2 N_1^3 \cos \alpha = 0 \quad \text{رابطه ۱۴}$$

رابطه ۱۴ را می‌توان به فرم $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ در نظر گرفت که در آن $a = 0$ ، $b = -N_1^2 \cos^2 \alpha - \frac{2}{\gamma} w \sin \alpha - 2F_1^2 N_1^2 \cos^2 \alpha$ و

$c = 2F_1^2 N_1^3 \cos \alpha$ برای حل معادله درجه سوم ابتدا Δ به صورت زیر محاسبه می‌شود:



رابطه ۱۵)

$$\Delta = \frac{c^2}{4} - \frac{b^3}{27}$$

در هنگام حل رابطه ۱۴ سه حالت برای Δ پیش می‌آید که هر کدام ریشه‌های مختص به خود را دارا هستند. با جایگذاری داده‌های آزمایشگاهی در رابطه بالا، $\Delta < 0$ به دست می‌آید که در این حالت معادله بالا سه ریشه دارد که دو ریشه آن خارج از محدوده مجاز اعماق ثانویه بوده و تنها یک ریشه به صورت رابطه زیر قابل قبول می‌باشد.

رابطه ۱۶)

$$h_2 = \frac{2\sqrt{-b}}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3} \times c}{2(\sqrt{-b})^3} \right) + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{a}{3}$$

برای استفاده از رابطه ۱۶ توسعه یافته در تحقیق حاضر نیاز به اندازه‌گیری عمق جریان در جهت نیروی گرانش در ابتدای پرش (h)، ارتفاع کف کانال در محل شروع پرش هیدرولیکی نسبت به سطح مبنا (Z_1) و بده جریان (Q) می‌باشد. این مقادیر به عنوان ورودی‌های اصلی مدل‌های تحلیلی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تحلیل تطبیقی داده‌های آزمایشگاهی با روابط تجربی موجود

به منظور ارزیابی قابلیت کاربرد روابط موجود، نسبت اعماق ثانویه محاسبه شده توسط این روابط با داده‌های مشاهداتی تحقیق حاضر و تحقیق Carollo et al., (2011) مقایسه شدند. در تحقیق حاضر مجدداً دقت روابط منتخب (Carollo et al., 2011) توسط داده‌های مشاهداتی موجود مقایسه و بررسی شدند. بررسی مجدد این روابط به علت سهولت اندازه‌گیری پارامترهای مورد نیاز آن‌ها در شرایط آزمایشگاهی موجود بود.

به منظور ارزیابی کمی دقت روابط، از شاخص میانگین درصد خطای مطلق (MAPE) استفاده شد.

جدول ۱ مقادیر MAPE در برآورد نسبت اعماق ثانویه هر یک از روابط را در شرایط مختلف اعماق پایاب نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند که در میان روابط موجود (بررسی شده توسط داده‌های مشاهداتی (Carollo et al., 2011)، رابطه پیشنهادی (Carollo et al., 2011) (Error! Reference source not found.) کمترین خطای پیش‌بینی را دارد. این رابطه، که بر اساس تحلیل ابعادی توسعه یافته است، به طور متوسط حدود ۵ درصد خطا داشته است. در مقابل، رابطه ارائه شده توسط Hager., (1992) (رابطه ۵) بیشترین خطا را داشته و در تمامی موارد، نسبت $h_2/h_2^* > 1.3$ خارج از محدوده قابل قبول بود. روابط توسعه یافته بر اساس اصل مومنتوم، به طور متوسط خطای بین ۲۰ تا ۳۰ درصد را نشان دادند. این موضوع نشان می‌دهد که این دسته از روابط، در مقایسه با رابطه پیشنهادی (Carollo et al., 2011) (Error! Reference source not found.) دقت کمتری دارند. با وجود دقت مناسب رابطه (Carollo et al., 2011) در برآورد نسبت اعماق ثانویه، مبنای تجربی این رابطه و وجود دو ضریب تجربی در آن، ارائه رابطه‌ای جدید بر مبنای اصل مومنتوم را ضروری ساخت. مطابق

جدول ۱ نتایج نشان داد که رابطه ارائه شده در تحقیق حاضر (رابطه ۱۶) دقت مناسبی در برآورد نسبت اعماق ثانویه دارد (حدود ۴/۵ درصد).

جدول ۱. برآورد میانگین درصد مطلق خطا (MAPE) روابط در دسترس برای تخمین نسبت اعماق ثانویه در مقایسه با داده‌های مشاهداتی

تحقیق (Carollo et al., 2011) و داده‌های مشاهداتی تحقیق حاضر

روابط	درصد میانگین خطای برآورد نسبت اعماق ثانویه در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی تحقیق (Carollo et al., 2011)	درصد میانگین خطای برآورد نسبت اعماق ثانویه در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی تحقیق حاضر
Hager, (1992)	۷/۳	۴۴/۱
Beirami & Chamani, (2006)	۸/۱	۲۶/۵
Hager, (1988)	-	۱۹/۶۷
Ohtsu & Yasuda, (1990, 1991)	۵	۲۲/۷
Kawagoshi & Hager, (1990)	۱۸/۱	۲۰/۴
Carollo et al., (2011)	۴/۹	۵/۲
تحقیق حاضر	-	۴/۵۶

بررسی ضریب تجربی K

K ضریبی برای تصحیح اختلاف بین شکل پروفیل خطی سطح آب و شکل پروفیل واقعی آن است که مطابق تحقیق (Ohtsu & Yasuda, 1990, 1991) به پارامترهای زیر وابسته است (در این رابطه h_d عمق پایاب است).

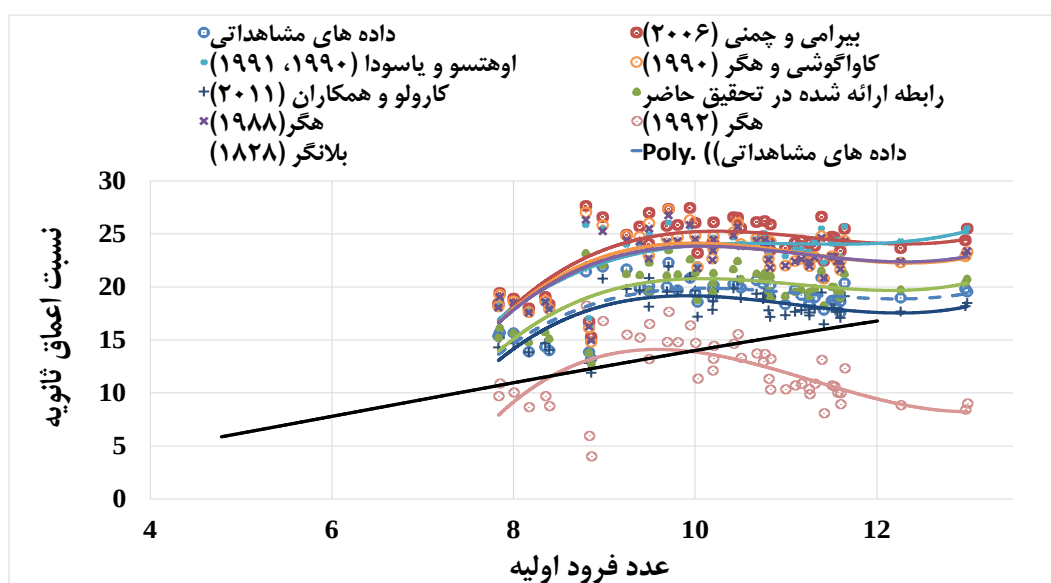
$$K = f(F_1, \theta, \frac{h_d}{N_1}) \quad \text{رابطه ۱۷}$$

تحلیل نتایج حاصل از واسنجی ضریب تجربی K نشان می‌دهد که این ضریب در شرایط آزمایشگاهی مختلف تقریباً ثابت بوده و به تغییرات عدد فرود اولیه و نسبت عمق پایاب به عمق جریان فوق بحرانی (h_d/N_1) حساسیت کمی نشان می‌دهد. در حالتی که شکل پروفیل سطح آب خطی باشد این ضریب را می‌توان برابر واحد در نظر گرفت (Te Chow, 2009). حداکثر مقدار این ضریب حدود ۲ و مربوط به حالتی است که پروفیل سطح آب به شکل قائم باشد. در مطالعه حاضر این ضریب برابر واحد در نظر گرفته شد.

بررسی نسبت اعماق ثانویه

با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی و جایگذاری آن‌ها در روابط ارائه‌شده توسط پژوهشگران پیشین، همچنین در رابطه پیشنهادی این تحقیق (رابطه ۱۶)، مقادیر نسبت اعماق ثانویه برای شرایط مختلف بازشدگی در پیچه پایین‌دست محاسبه شد. به منظور تحلیل تأثیر عدد فرود اولیه بر نسبت اعماق ثانویه، نتایج حاصل از آزمایش‌ها برای دامنه گسترده‌ای از شرایط جریان استخراج و در شکل ۵ ارائه گردیده است. به‌منظور ارزیابی تطابق نتایج این پژوهش با مطالعات پیشین، نمودار (Belanger (1828 نیز ترسیم گردید. این شکل تغییرات نسبت اعماق ثانویه را در پاسخ به تغییر عمق پایاب و در نتیجه، تغییر عدد فرود اولیه نمایش می‌دهد.

بررسی نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد فرود اولیه، روند کلی نسبت اعماق ثانویه افزایشی است؛ به‌گونه‌ای که مطابق شکل ۵، افزایش عدد فرود از ۸/۷ به ۱۳ موجب افزایش نسبت اعماق ثانویه از حدود ۱۲ به ۲۳/۵ گردیده است. این رفتار بیانگر افزایش محسوس اختلاف انرژی بین جریان اولیه و ثانویه در اثر تشدید انرژی جنبشی جریان ورودی است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که داده‌های حاضر از نظر روند تغییرات با رابطه (Belanger (1828 سازگاری قابل قبولی دارند، هرچند اختلاف‌هایی در محدوده اعداد فرود بالا مشاهده می‌شود. مقایسه نتایج حاصل از روابط مختلف نشان می‌دهد که رابطه پیشنهادی این پژوهش بیشترین انطباق را با داده‌های تجربی دارد. در مقابل، رابطه ارائه‌شده توسط Hager (1992 بیشترین انحراف را از مقادیر اندازه‌گیری‌شده نشان داده است، به‌گونه‌ای که نتایج آن در اعداد فرود بالا اختلاف محسوس نسبت به داده‌های واقعی دارد. این امر کارایی بهتر رابطه پیشنهادی در توصیف رفتار پرش هیدرولیکی تحت شرایط بازشدگی متفاوت در پیچه پایین‌دست را تأیید می‌کند.



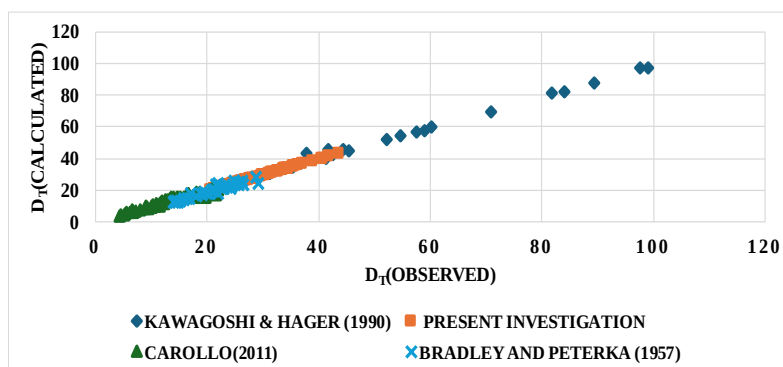
شکل ۵. نحوه تغییرات نسبت اعماق ثانویه (h_2/N_1) در مقابل عدد فرود اولیه

بررسی تجربی و تطبیقی مدل پیشنهادی بر اساس داده‌های آزمایشگاهی و مطالعات مرجع

در شکل ۶، نسبت عمق ثانویه به ارتفاع نظیر فشار در مقطع ابتدایی پرش هیدرولیکی (D_T) در آزمایشگاه به عنوان متغیر مستقل (محور



افقی) و نسبت محاسبه شده این عمق به عنوان متغیر وابسته (محور عمودی) نشان داده شده است. داده‌های تجربی ارائه شده توسط Kawagoshi & Hager, (1990)، Bradley & Peterka, (1957) و Carollo et al., (2011) نیز در کنار رابطه پیشنهادی حاصل از مطالعه حاضر (رابطه ۱۶) مطرح شده‌اند. نتایج نشان‌دهنده تطابق قابل توجهی میان این داده‌ها و روابط ارائه شده است که اعتبار و دقت مدل توسعه یافته را تایید می‌کند.



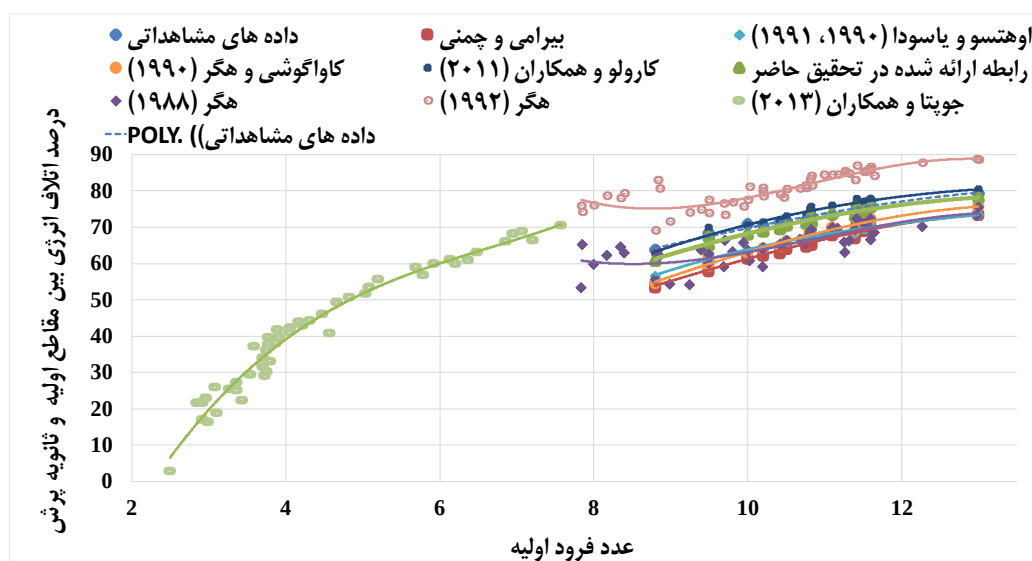
شکل ۶. مقایسه نسبت عمق ثانویه به ارتفاع نظیر فشار در مقطع ابتدایی پرش هیدرولیکی: داده‌های تجربی (Kawagoshi & Hager, (1990)، Bradley & Peterka, (1957) و Carollo et al., (2011) و رابطه پیشنهادی مطالعه حاضر (رابطه ۱۶)

درصد اتلاف انرژی

درصد اتلاف انرژی عبارت است از درصد تفاوت انرژی مقاطع بالادست و پایین دست پرش نسبت به انرژی مقطع اولیه پرش که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\eta = \frac{H_1 - H_2}{H_1} \times 100 = \left(\frac{v_1^2}{2g} + N_1 + z_1 \right) - \left(\frac{v_2^2}{2g} + h_2 + z_2 \right) \quad (\text{رابطه ۱۸})$$

در این مطالعه، درصد اتلاف انرژی در پرش هیدرولیکی نوع B با استفاده از رابطه ۱۸ و مقادیر عمق ثانویه از روابط مختلف محاسبه شد. نتایج نشان داد که با افزایش عدد فرود اولیه از ۷/۸ به ۱۳، اتلاف انرژی از حدود ۶۰ به ۸۰ درصد افزایش می‌یابد و تغییرات بازشدگی درجه تأثیر قابل توجهی ندارد. رابطه پیشنهادی (رابطه ۱۶) بیشترین دقت و کمترین خطا را در پیش‌بینی درصد اتلاف انرژی داشته است، در حالی که رابطه Hager (1992) (رابطه ۵) بیشترین خطا را نشان داد. این یافته‌ها بیانگر افزایش آشفستگی و اتلاف انرژی با افزایش عدد فرود است (شکل ۷). علاوه بر این، داده‌های آزمایشگاهی ارائه شده توسط Gupta et al., (2013) نیز در شکل ۷ نشان داده شده‌اند که با نتایج حاصل از پژوهش حاضر تطابق مناسبی دارند.



شکل ۷. نحوه تغییرات درصد اتلاف انرژی در مقابل عدد فرود اولیه

جدول ۲ میانگین درصد خطای برآورد اتلاف انرژی را نمایش می‌دهد. همانگونه که ملاحظه می‌شود تحقیق حاضر در مقایسه با سایر روابط بیشترین دقت را دارد (خطای ۱/۷ درصد).

جدول ۲. برآورد میانگین درصد مطلق خطا (MAPE) برای روابط در دسترس برای تخمین اتلاف انرژی در مقایسه با داده‌های مشاهداتی تحقیق حاضر

روابط	درصد میانگین خطای برآورد اتلاف انرژی در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی تحقیق حاضر
Hager, (1992)	۱۵
Beirami & Chamani, (2006)	۱۰/۲۲
Hager, (1988)	۷/۷۵
Ohtsu & Yasuda, (1990, 1991)	۸/۶۵
Kawagoshi & Hager, (1990)	۸
Carollo et al., (2011)	۱/۹۴
تحقیق حاضر	۱/۶۹

بررسی طول ناحیه غلتان

بر اساس مطالعه Ohtsu & Yasuda, (1990)، طول ناحیه غلتان تابعی از پارامترهای زیر می‌باشد:

رابطه ۱۹

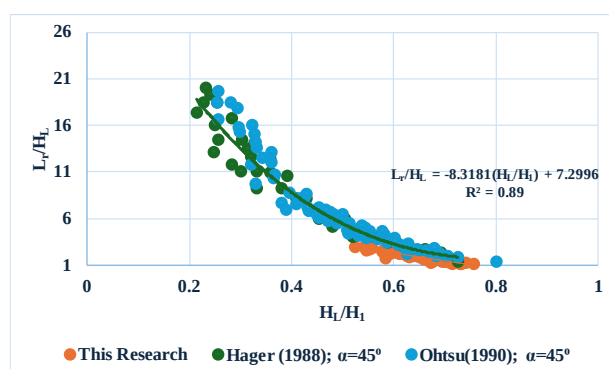
$$\frac{L_r}{H_L} = f\left(\frac{H_L}{H_1}, \text{shape}\right)$$

با استفاده از تحلیل رگرسیون و با میانگین درصد خطای مطلق ۲/۱۳ درصد، رابطه زیر حاصل شد:

$$\frac{L_r}{H_L} = 7.3 - 8.3 \times \left(\frac{H_L}{H_1}\right)$$

رابطه ۲۰

شکل ۸ تغییرات نسبت طول ناحیه غلتان پرش هیدرولیکی به افت انرژی (L_r/H_L) را بر حسب نسبت افت انرژی به انرژی اولیه (H_L/H_1) نشان می‌دهد. در این نمودار، داده‌های حاصل از آزمایش‌های حاضر (نقاط نارنجی) با داده‌های Hager, (1988) (نقاط سبز) و Ohtsu & Yasuda, (1990) (نقاط آبی) مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش نسبت H_L/H_1 ، مقدار L_r/H_L به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. این روند کاهش بیانیگر آن است که با افزایش سهم افت انرژی نسبت به انرژی اولیه، طول ناحیه غلتان نسبت به افت انرژی کاهش می‌یابد؛ به عبارت دیگر، برای یک مقدار مشخص افت انرژی، افزایش طول ناحیه غلتان منجر به افزایش افت انرژی اولیه می‌شود. این رفتار کاملاً با نتایج گزارش شده توسط Hager, (1988) و Ohtsu & Yasuda, (1990) مطابقت دارد و هم‌سویی مناسبی میان داده‌های آزمایشگاهی این تحقیق و روابط تجربی پیشین مشاهده می‌شود. همچنین برازش خطی داده‌های این تحقیق (ضریب تعیین $R^2=0.89$) نشان‌دهنده همبستگی مناسب میان متغیرهای مورد بررسی است و اعتبار نتایج تجربی را تأیید می‌کند. این همبستگی نشان می‌دهد که رابطه بین طول ناحیه غلتان و افت انرژی می‌تواند به عنوان یک ابزار قابل اعتماد برای تحلیل و طراحی سازه‌های هیدرولیکی مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۸. رابطه بین طول غلتان و افت انرژی در پرش هیدرولیکی نوع B بدون حضور آستانه

بررسی طول پرش روی شیب بالادست (L_1)

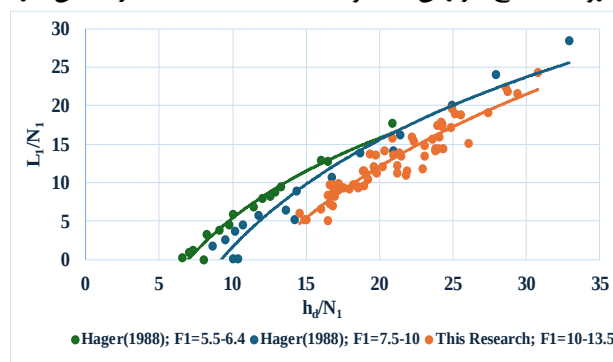
بر اساس مطالعه Ohtsu & Yasuda, (1990)، طول پرش هیدرولیکی بر روی شیب بالادست سرریز (L_1) تابعی از پارامترهای عمق پایاب نسبی (h_d/N_1) و عدد فرود اولیه (F_1) است که به صورت رابطه تجربی زیر بیان می‌شود:

$$\frac{L_1}{N_1} = f\left(\frac{h_d}{N_1}, F_1\right) \quad \text{رابطه (۲۱)}$$

با استفاده از تحلیل رگرسیون و با میانگین درصد خطای مطلق ($MAPE = 1.675$)، رابطه زیر حاصل شده است:

$$\frac{L_1}{N_1} = -0.985 + 0.44 \times \left(\frac{h_d}{N_1}\right)^2 \times F_1^{-1.177} \quad \text{رابطه (۲۲)}$$

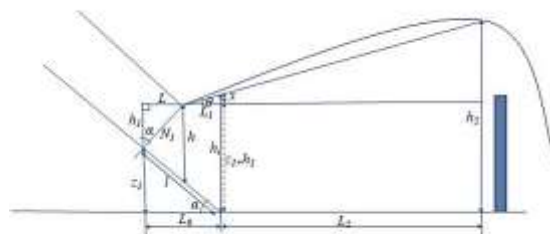
همان‌طور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، با افزایش عمق نسبی پایاب، طول نسبی پرش روی بخش شیبدار افزایش می‌یابد و پرش به سمت بالادست انتقال می‌یابد. این روند با نتایج گزارش شده توسط Hager., (1988) نیز تطابق دارد.



شکل ۹. رابطه بین طول پرش روی شیب بالادست (L_1) و عمق پایاب (h_d)

ارزیابی ویژگی‌های پرش هیدرولیکی نوع B در شرایط استقرار آستانه

شکل ۱۰ نمایی کلی از پرش نوع B در حالت استقرار آستانه را نشان می‌دهد.



شکل ۱۰. شکل شماتیک پرش نوع B در حضور آستانه با فرض خطی بودن شکل پروفیل سطح آب

با توجه به شکل ۱۰ و با نوشتن اصل مومنوم در جهت افقی، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$P_1 - P_2 + w \sin \alpha - D - F_f = \frac{\gamma q}{g} (\beta_2 v_2 - \beta_1 v_1 \cos \alpha) \quad \text{رابطه (۲۳)}$$

که در این رابطه $P_1 = 0.5 \gamma N_1^2 (\cos \alpha)^2$ نیروی فشاری در مقطع شروع پرش، $P_2 = 0.5 \gamma h_2^2$ نیروی فشاری در مقطع ثانویه پرش، D نیروی درگ وارد بر آستانه، F_f نیروی برشی، $q = v_1 N_1$ بده در واحد عرض کانال، v_1 سرعت در مقطع اولیه پرش، $v_2 = v_1 N_1 / h_2$ سرعت در مقطع ثانویه f ضریب تصحیح فشار در مقطع ثانویه پرش می‌باشند. در این رابطه می‌توان از اثر نیروی برشی صرف نظر و ضرایب β_1 و β_2 را برابر واحد فرض نمود. w نیز نیروی افقی وارد از طرف کف سطح شیبدار بوده و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$w = \frac{1}{2} \gamma K I (N_1 \cos \alpha + h_1) \quad \text{رابطه (۲۴)}$$

در این رابطه γ وزن مخصوص آب، K ضریبی است که به عنوان تفاوت بین شکل پروفیل خطی و واقعی سطح آب بین مقطع شروع پرش و مقطع تغییر شیب کانال معرفی می‌شود که با توجه به مشاهدات آزمایشگاهی پروفیل سطح آب از محل شروع پرش تا محل تغییر

شیب تقریباً خطی بوده و مقدار این ضریب واحد فرض می‌شود، بنابراین l و L_0 به ترتیب فاصله ابتدای پرش تا محل تغییر شیب در راستای شیب و فاصله در جهت افق بوده و از رابطه $z_1/\tan\alpha$ و $z_1/\sin\alpha$ به دست می‌آیند. همچنین L_2 فاصله آستانه از محل تغییر شیب می‌باشد. D نیروی درگ وارد شده بر آستانه در واحد عرض بوده و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D = \frac{1}{2} \gamma c_{DS} \frac{v_1^2}{g} \quad \text{رابطه ۲۵}$$

در این رابطه c_D ضریب درگ و s ارتفاع آستانه است.

همچنین با فرض خطی بودن شکل پروفیل سطح آب مطابق شکل ۱۰ (متغیر x)، h_i از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$h_i = z_1 + N_1 \cos \alpha + x = z_1 + N_1 \cos \alpha + (h_2 - z_1 - N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_2 + L_1} \quad \text{رابطه ۲۶}$$

جایگذاری پارامترها در رابطه ۲۶، منجر به رابطه ۲۷ می‌شود.

$$\frac{1}{2} \gamma N_1^2 \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} f \gamma h_2^2 + \frac{1}{2} k \gamma l \left(2N_1 \cos \alpha + h_2 \frac{L_1}{L_1 + L_2} - (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right) \sin \alpha - \quad \text{رابطه ۲۷}$$

$$\frac{\gamma}{2} c_{DS} \frac{v_1^2}{g} = p q \left(\frac{q}{(h_2 - s)} - \frac{q}{N_1} \cos \alpha \right)$$

با ضرب دو طرف رابطه ۲۷ در $h_2 - s$ ، رابطه ۲۸ حاصل می‌شود:

$$\frac{\gamma}{2} (N_1 \cos \alpha)^2 h_2 - \frac{\gamma}{2} (N_1 \cos \alpha)^2 s - \frac{\gamma}{2} f h_2^3 + \frac{\gamma}{2} f s h_2^2 + \frac{\gamma}{2} K l \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} h_2^2 - \quad \text{رابطه ۲۸}$$

$$\frac{\gamma}{2} K l \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} s h_2 + \frac{\gamma}{2} K l \sin \alpha \left[2N_1 \cos \alpha + z_1 - (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] h_2 -$$

$$\frac{\gamma}{2} K s l \sin \alpha \left[2N_1 \cos \alpha + z_1 - (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] - \frac{\gamma}{2} c_{DS} \frac{v_1^2}{g} h_2 + \frac{\gamma}{2} c_{DS} \frac{v_1^2}{g} -$$

پس از مرتب سازی رابطه ۲۸، حاصل می‌شود:

$$-\frac{\gamma}{2} f h_2^3 + \left[\frac{\gamma f s}{2} + \frac{\gamma K l}{2} \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] h_2^2 + \left[\frac{\gamma}{2} (N_1 \cos \alpha)^2 - \quad \text{رابطه ۲۹}$$

$$\frac{\gamma}{2} s K l \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} + \frac{\gamma}{2} K l \sin \alpha \left(2N_1 \cos \alpha + z_1 - (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right) -$$

$$\frac{\gamma}{2} c_{DS} \frac{v_1^2}{g} + \frac{\gamma q^2 \cos \alpha}{g N_1} \left] h_2 - \frac{\gamma}{2} (N_1 \cos \alpha)^2 s - \frac{\gamma}{2} s l K \sin \alpha \left[2N_1 \cos \alpha + z_1 - \right.$$

$$\left. (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] + \frac{\gamma}{2} c_{DS} \frac{v_1^2}{g} - \frac{\gamma q^2}{g} - \frac{\gamma q^2 s \cos \alpha}{g N_1} = 0$$

با تقسیم دو طرف رابطه ۲۹ بر $\gamma/(2f)$ ، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$h_2^3 - \left[f s + K l \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] \frac{h_2^2}{f} + \left[-(N_1 \cos \alpha)^2 + s K l \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} - K l \sin \alpha \left(2N_1 \cos \alpha + z_1 - \right. \quad \text{رابطه ۳۰}$$

$$\left. (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right) + c_{DS} \frac{v_1^2}{g} - \frac{2q^2 \cos \alpha}{g N_1} \left] \frac{h_2}{f} + \left[(N_1 \cos \alpha)^2 s + s l K \sin \alpha \left[2N_1 \cos \alpha + z_1 - \right.$$

$$\left. (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] - c_{DS} \frac{v_1^2}{g} + \frac{2q^2}{g} + \frac{2q^2 s \cos \alpha}{g N_1} \left] \frac{1}{f} = 0$$

رابطه ۳۰ را می‌توان به فرم $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ در نظر گرفت که در آن

$$a = - \left[f s + K l \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] \frac{1}{f} \quad \text{رابطه ۳۱}$$

$$b = \left[-(N_1 \cos \alpha)^2 + s K l \sin \alpha \frac{L_1}{L_1 + L_2} - K l \sin \alpha \left(2N_1 \cos \alpha + z_1 - (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right) + c_{DS} \frac{v_1^2}{g} - \right.$$

$$\left. \frac{2q^2 \cos \alpha}{g N_1} \right] \frac{1}{f}$$



$$c = \left[(N_1 \cos \alpha)^2 s + sIK \sin \alpha \left[2N_1 \cos \alpha + z_1 - (z_1 + N_1 \cos \alpha) \frac{L_1}{L_1 + L_2} \right] - c_D s^2 \frac{v_1^2}{g} + \frac{2q^2}{g} + \frac{2q^2 s \cos \alpha}{gN_1} \right] \frac{1}{f}$$

با توجه به ثابت‌های a ، b و c ، ضرایبی تحت عنوان p و q به صورت $P = b - a^2/3$ و $q = 2a^3/27 - ab/3 + c$ در نظر گرفته و برای حل معادله درجه سوم ابتدا Δ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \quad \text{رابطه ۳۲}$$

در حل رابطه ۳۲ سه حالت برای Δ رخ می‌دهد که هر کدام ریشه‌های مختص به خود را دارا هستند. با جایگذاری داده‌های آزمایشگاهی در رابطه بالا، $\Delta < 0$ به دست می‌آید که در این حالت معادله بالا سه ریشه دارد که دو ریشه آن خارج از محدوده مجاز اعماق ثانویه بوده و تنها یک ریشه به صورت رابطه زیر قابل قبول می‌باشد.

$$h_2 = \frac{2\sqrt{-b}}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3} \times c}{2(\sqrt{-b})^3} \right) + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{a}{3} \quad \text{رابطه ۳۳}$$

برای استفاده از رابطه ۳۳ توسعه یافته در تحقیق حاضر نیاز به اندازه‌گیری عمق جریان در جهت نیروی گرانش در ابتدای پرش (h)، ارتفاع کف کانال در محل شروع پرش هیدرولیکی نسبت به سطح مبنا (Z_1) و بده جریان (Q) می‌باشد.

کارایی مدل در تخمین درصد اتلاف انرژی

با جایگذاری مقادیر عمق ثانویه به دست آمده از رابطه ۳۳ در رابطه ۱۸، میزان درصد اتلاف انرژی محاسبه می‌شود. جدول ۳ نشان می‌دهد که رابطه ۳۳ با خطای ۰/۷ درصد، بهترین تخمین را برای درصد اتلاف انرژی در آستانه با ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر و فاصله نسبی ۳ ارائه می‌دهد. همچنین در فاصله نسبی ۱/۴، خطای مدل به ۵/۶۲ درصد کاهش می‌یابد. بر اساس داده‌های

جدول ۴، ضریب فشار با افزایش فاصله‌ی آستانه به سمت ۱ میل می‌کند و در فاصله نسبی ۱/۴ به مقدار ۱ می‌رسد که این موضوع بیانگر انتقال تدریجی شرایط جریان به وضعیت هیدرواستاتیک است. در فاصله نسبی ۰/۱، ضریب فشار در بازه ۰/۷۵ تا ۰/۹ مشاهده شده که نشان‌دهنده حضور مؤلفه‌های دینامیکی قوی در نزدیکی محل تغییر شیب می‌باشد.

قرارگیری آستانه در فاصله نسبی ۱/۴ که منجر به اتلاف انرژی مطلوب، نزدیک شدن پروفیل فشار به توزیع هیدرواستاتیک و همزمان کاهش ابعاد حوضچه آرامش می‌شود، می‌تواند به عنوان ناحیه‌ای با ویژگی‌های مناسب برای طراحی حوضچه‌های آرامش تلقی گردد. این بهبود عملکرد احتمالاً ناشی از تشکیل الگوی جریان پایدارتر در این ناحیه است.

شایان ذکر است که کم بودن خطای برآزش لزوماً به مفهوم بهینه بودن شرایط نیست؛ معیار اصلی بهینه بودن در این مطالعه، عملکرد بهتر در کاهش انرژی است، به عبارتی افت انرژی بیشتر معیار واقعی بهینه بودن می‌باشد. بنابراین، در تحلیل‌های بهینه‌سازی، علاوه بر دقت مدل، توجه ویژه به پارامترهای عملکردی مانند افت انرژی اهمیت دارد و این نکته باید حتماً مدنظر قرار گیرد.

جدول ۳. ارزیابی دقت مدل در پیش‌بینی اتلاف انرژی

فاصله آستانه از محل تغییر شیب کانال (L_2) نسبت به عرض کانال						ارتفاع آستانه (سانتی‌متر)
۳	۲/۲	۱/۴	۰/۸۶	۰/۵	۰/۱	
-	-	-	۳/۷۳۸	-	-	۶
۰/۷	۲/۰۷۵	۵/۶۲	۴/۲۶	۸/۲۳	۷/۷۷	۱۰
۱/۰۶	۲/۳	۳/۱۱	-	-	۷/۹۵	۱۵

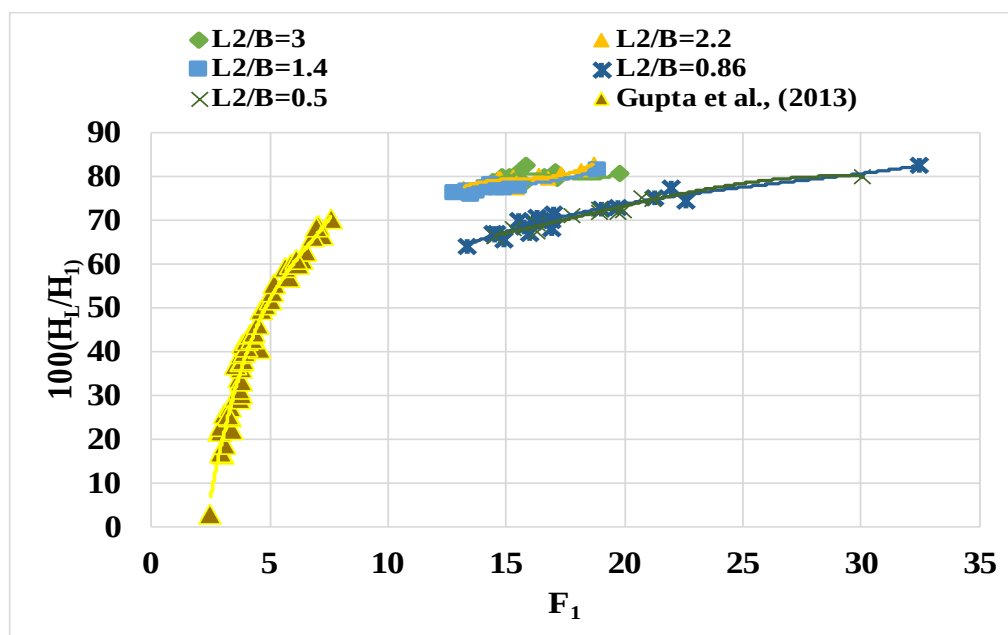
جدول ۴. ضریب فشار در ناحیه تغییر شیب

ارتفاع آستانه (سانتی‌متر)	تغییرات ضریب فشار جریان در محل تغییر شیب کانال برای مقادیر مختلف ارتفاع آستانه				
	۰/۱	۰/۵	۰/۸۶	۱/۴	۲/۲
۶	-	-	۰/۶	-	-
۱۰	۰/۶۵	۰/۸۲	۰/۷۲	۱	۱
۱۵	۰/۹	-	-	۱	۱

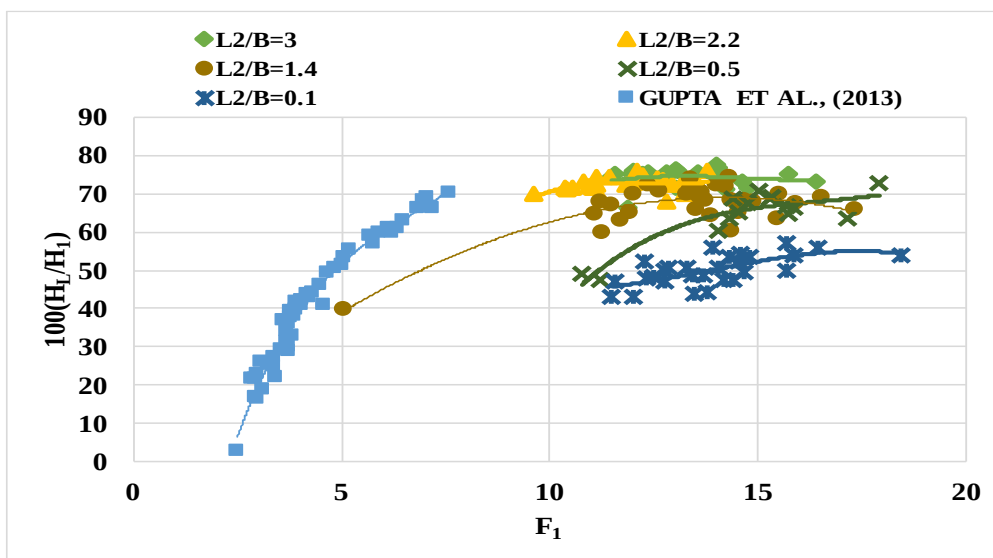
تأثیر موقعیت آستانه بر درصد اتلاف انرژی

نمودارهای ارائه‌شده در شکل ۱۱ تا شکل ۱۳ نشان می‌دهند که درصد اتلاف انرژی با افزایش فاصله افقی آستانه نسبت به نقطه تغییر شیب جریان افزایش می‌یابد. در فواصل نسبی کم (مثلاً حدود ۰/۱ تا ۰/۵ برابر عرض کانال)، میزان اتلاف انرژی پایین است که بیانگر راندمان پایین پرش هیدرولیکی در این شرایط می‌باشد. در مقابل، در فواصل نسبی بزرگ‌تر (تقریباً ۱/۴ تا ۳ برابر عرض کانال)، درصد اتلاف انرژی از حدود ۶۵٪ تا تقریباً ۸۰٪ افزایش می‌یابد، که این مقدار در محدوده بهینه برای پرش‌های کلاسیک قرار دارد. این افزایش اتلاف انرژی به دلیل توسعه آشفتگی‌ها و تلاطم‌های جریان در حوضچه آرامش است که موجب مستهلک شدن مؤثر انرژی جنبشی جریان می‌شود. بنابراین، جایگذاری آستانه در موقعیتی بهینه با نسبت فاصله نسبی حدود ۱/۴ می‌تواند ترکیبی از دو اثر مطلوب را به همراه داشته باشد: کاهش طول پرش (که باعث تثبیت سریع‌تر جریان می‌شود) و افزایش درصد اتلاف انرژی. این دو عامل به صورت همزمان عملکرد حوضچه آرامش را بهبود بخشیده و منجر به طراحی بهینه‌تر برای کنترل انرژی در پرش‌های هیدرولیکی می‌شوند.

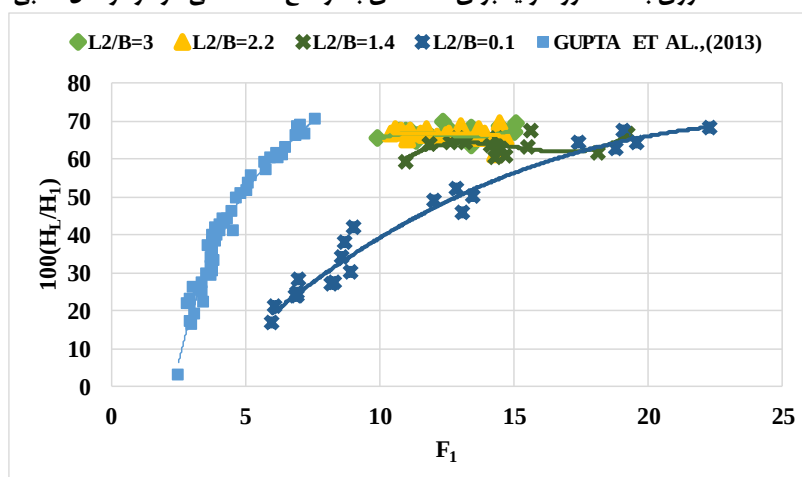
همچنین، همانطور که مطابق نتایج مطالعه Gupta et al., (2013) مشاهده شده است، در پرش کلاسیک بدون آستانه، شیب نمودار اتلاف انرژی بیشتر است که نشان‌دهنده اتلاف انرژی بیشتر نسبت به پرش نوع B می‌باشد.



شکل ۱۱. نمودار تغییرات درصد اتلاف انرژی با عدد فرود اولیه برای آستانه‌ای به ارتفاع ۶ سانتی‌متر در فواصل نسبی مختلف از محل تغییر شیب



شکل ۱۲. نمودار تغییرات درصد اتلاف انرژی با عدد فرود اولیه برای آستانه‌ای به ارتفاع ۱۰ سانتی‌متر در فواصل نسبی مختلف از محل تغییر شیب



شکل ۱۳. نمودار تغییرات درصد اتلاف انرژی با عدد فرود اولیه برای آستانه‌ای به ارتفاع ۱۵ سانتی‌متر در فواصل نسبی مختلف از محل تغییر شیب

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار پرش هیدرولیکی نوع B در شرایط مختلف پایاب، با و بدون آستانه، مورد مدل‌سازی و بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد رابطه تجربی (Carollo et al. (2011) در شرایط بدون آستانه کمترین خطا را در تخمین نسبت عمق‌های ثانویه دارد، اما به دلیل وجود ضرایب تجربی، نیاز به توسعه روابط مبتنی بر اصل مومنوم احساس شد. رابطه جدید ارائه شده در این تحقیق (رابطه ۱۶) با میانگین خطای حدود ۴/۵ درصد در نسبت عمق‌ها و ۱/۷ درصد در محاسبه اتلاف انرژی، انطباق خوبی با داده‌های آزمایشگاهی و پژوهش‌های پیشین دارد. همچنین، افزایش عدد فرود اولیه موجب افزایش نسبت عمق‌های ثانویه و درصد اتلاف انرژی می‌شود؛ درصد اتلاف انرژی در این مطالعه بین ۶۰ تا ۸۰ درصد بوده است. همبستگی قابل توجهی بین طول پرش، ناحیه غلتان و افت انرژی مشاهده شد که با روابط تجربی قبلی مطابقت داشت. در حضور آستانه، ارتفاع و موقعیت آن تأثیر مهمی بر دقت تخمین نسبت عمق‌ها و اتلاف انرژی داشتند؛ فاصله نسبی حدود ۱/۴ تا ۲/۲ از محل تغییر شیب کانال به عنوان منطقه بهینه برای نصب آستانه معرفی شد، که موجب افزایش اتلاف انرژی و کاهش ابعاد حوضچه آرامش می‌شود.

نتایج این پژوهش می‌تواند به عنوان پایه‌ای معتبر برای تحلیل و طراحی بهینه سازه‌های کنترل انرژی در کانال‌ها و سرریزها به کار رود و عملکرد مدل ارائه شده را در شرایط هیدرولیکی متنوع تأیید می‌کند.

REFERENCES

Beirami, M. K., & Chamani, M. R. (2006). Hydraulic Jumps in Sloping Channels: Sequent Depth Ratio.

- Journal of Hydraulic Engineering, 132(10), 1061-1068. [https://doi.org/doi:10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2006\)132:10\(1061\)](https://doi.org/doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(2006)132:10(1061))
- Belanger, J. B. (1828). Essai sur la solution numerique de quelques problemes relatifs au mouvement permanent des eaux courantes; par m. J.-B. Belan(Gupta et al., 2013)ger. Chez Carilian-Goeury, libraire, des corps royaux des ponts et chaussees et
- Bradley, J., & Peterka, A. (1957). Hydraulic design of stilling basins: Stilling basin with sloping apron (Basin V). *Journal of the Hydraulics Division*, 83(5), 1405-1401-1405-1432.
- Carollo, F. G., Ferro, V., & Pampalone, V. (2011). Sequent Depth Ratio of a B-Jump. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(6), 651-658. [https://doi.org/doi:10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0000342](https://doi.org/doi:10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000342)
- Chow, V. T. (2009). *Open-channel Hydraulics*. Blackburn Press. <https://books.google.com/books?id=JAJ7swEACAAJ>
- Gupta, S. K., Mehta, R. C., & Dwivedi, V. K. (2013). Modeling of Relative Length and Relative Energy Loss of Free Hydraulic Jump in Horizontal Prismatic Channel. *Procedia Engineering*, 51, 529-537. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.01.075>
- Hager, W. H. (1988). B-jump in sloping channel. *Journal of Hydraulic Research*, 26(5), 539-558. <https://doi.org/10.1080/00221688809499192>
- HAGER, W. H. (1992). *Energy Dissipators and Hydraulic Jump*. Springer Netherlands. <https://books.google.com/books?id=TxLtWJwYY8oC>
- Hager, W. H., Basler, B., & Wanoschek, R. (1986). Incipient Jump Condition for Ventilated Sill Flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 112(10), 953-963. [https://doi.org/doi:10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1986\)112:10\(953\)](https://doi.org/doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1986)112:10(953))
- Kawagoshi, N., & Hager, W. H. (1990). B-jump in sloping channel, II. *Journal of Hydraulic Research*, 28(4), 461-480. <https://doi.org/10.1080/00221689009499060>
- Khanahmadi, E., Dehghani, A. A., Halaghi, M. M., Kordi, E., & Bahmanpouri, F. (2022). Investigating the characteristic of hydraulic T-jump on rough bed based on experimental and numerical modeling. *Modeling Earth Systems and Environment*, 8(4), 5695-5712.
- Kindsvater, C. E. (1944). The Hydraulic Jump in Sloping Channels. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 109(1), 1107-1120. <https://doi.org/doi:10.1061/TACEAT.0005733>
- Macián-Pérez, J. F., García-Bartual, R., López-Jiménez, P. A., & Vallés-Morán, F. J. (2023). Numerical modeling of hydraulic jumps at negative steps to improve energy dissipation in stilling basins. *Applied Water Science*, 13(10), 203.
- Ohtsu, I., & Yasuda, Y. (1990). B-jump in sloping channel. *Journal of Hydraulic Research*, 28(1), 105-119.
- Ohtsu, I., & Yasuda, Y. (1991). Hydraulic Jump in Sloping Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(7), 905-921. [https://doi.org/doi:10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1991\)117:7\(905\)](https://doi.org/doi:10.1061/(ASCE)0733-9429(1991)117:7(905))
- Rajaratnam, N. (1966). The hydraulic jump in sloping channels. *Water and Energy International*, 23(2), 137-149.
- Singh, U. K., & Roy, P. (2023). Energy dissipation in hydraulic jumps using triple screen layers. *Applied Water Science*, 13(1), 17.
- Murtaza, N., Pasha, G. A., Tanaka, N., Ghani, U., Anjum, N., & Iqbal, K. (2025). Analysis of Hydraulic Jump and Energy Dissipation in Flow Through Emergent Vegetation Under Varying Froude Numbers. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 49(3), 2759-2777. <https://doi.org/10.1007/s40996-024-01571-x>
- Elshaarawy, M. K., & Hamed, A. K. (2025). Machine learning and interactive GUI for estimating roller length of hydraulic jumps. *Neural Computing and Applications*, 37(6), 4247-4276. <https://doi.org/10.1007/s00521-024-10846-3>
- Rasoul, D., Hojjat, S., Amir, G., & John Patrick, A. (2024). Characteristics of hydraulic jump and energy dissipation in the downstream of stepped spillways with rough steps. *Flow Measurement and Instrumentation*, 96, 102506. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2023.102506>